

中图分类号：TB114.3

论文编号：10006BY1214114

北京航空航天大学
博士学位论文

考虑混合不确定性的
加速退化建模方法研究

作者姓名 刘乐

学科专业 系统工程

指导教师 张建国 教授

李晓阳 副教授

培养学院 可靠性与系统工程学院

**Research on accelerated degradation modeling with
mixture uncertainty**

A Dissertation Submitted for the Degree of Doctor of Philosophy

Candidate: LIU Le

Supervisor: Prof. ZHANG Jian-Guo

Asso. Prof. LI Xiao-Yang

School of Reliability and Systems Engineering

Beihang University, Beijing, China

中图分类号：TB114.3

论文编号：10006BY1214114

博 士 学 位 论 文

考虑混合不确定性的 加速退化建模方法研究

作者姓名	刘乐	申请学位级别	工学博士
指导教师姓名	张建国 / 李晓阳	职 称	教授 / 副教授
学科专业	系统工程	研究方向	加速退化试验
学习时间自	2012 年 9 月 3 日	起至	2016 年 12 月 1 日止
论文提交日期	2016 年 12 月 16 日	论文答辩日期	2017 年 1 月 17 日
学位授予单位	可靠性与系统工程学院	学位授予日期	年 月 日

关于学位论文的独创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在指导教师指导下独立进行研究工作所取得的成果，论文中有关资料和数据是实事求是的。尽我所知，除文中已经加以标注和致谢外，本论文不包含其他人已经发表或撰写的研究成果，也不包含本人或他人为获得北京航空航天大学或其它教育机构的学位或学历证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对研究所做的任何贡献均已在论文中作出了明确的说明。

若有不实之处，本人愿意承担相关法律责任。

学位论文作者签名：_____ 日期： 年 月 日

学位论文使用授权书

本人完全同意北京航空航天大学有权使用本学位论文（包括但不限于其印刷版和电子版），使用方式包括但不限于：保留学位论文，按规定向国家有关部门（机构）送交学位论文，以学术交流为目的赠送和交换学位论文，允许学位论文被查阅、借阅和复印，将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，采用影印、缩印或其他复制手段保存学位论文。

保密学位论文在解密后的使用授权同上。

学位论文作者签名：_____ 日期： 年 月 日

指导教师签名：_____ 日期： 年 月 日

摘 要

为了在有限资源下开展高可靠长寿命产品的寿命与可靠性评估工作，加速退化试验技术得到了广泛应用。通过对有限样本下的加速退化试验数据进行统计分析，来推断产品总体在实际使用条件下的寿命与可靠性指标。然而，传统建模方法主要考虑样本间差异性、测量误差等随机不确定性，而忽略了数据非精确性、模型选择等认知不确定性，导致给出的寿命与可靠性评估结果较为片面甚至是错误的。如何在目前建模的基础上，进一步描述和量化这些认知不确定性对评估结果的影响，是加速退化理论研究亟待解决的难题。

为此，本文考虑随机和认知不确定性（统称为混合不确定性）的加速退化建模方法研究，重点关注加速退化试验中存在的认知不确定性，其主要来源包括：1) 测量数据的非精确；2) 有限的试验样本量；3) 退化模型的选择；4) 加速应力类型的选取；5) 内场总体特征和外场个体特征差异。本文具体研究工作如下：

首先，针对区间型和非直接观测的加速退化试验数据存在非精确性问题，本文分别基于区间分析和模糊理论对非精确退化轨迹进行建模，基于非精确概率方法给出了可靠度盒子及模糊可靠度评估结果，刻画非精确测量数据对产品可靠度评估结果的影响。

其次，针对小样本情况下加速退化试验数据推断缺乏可信性的问题，本文引入专家信度对退化数据或退化轨迹所蕴含的推断信息进行评分，并结合不确定理论中的不确定过程对各退化轨迹进行建模，基于不确定测度给出产品的确信可靠性评估结果，为组件级产品的确信可靠性评估提供依据。

第三，针对加速退化建模中存在三种随机过程模型选择的问题，本文采用贝叶斯模型平均方法，根据模型后验概率及 p 分位寿命后验分布来量化模型不确定性对寿命评估结果的影响，并最终实现多模型的综合评估。

第四，针对多源加速退化数据集存在加速应力类型不同的问题，本文研究基于互斥集合的概率分配方法，依赖于加速应力类型全集构造互斥的应力类型子集，通过集合的概率分配量化加速应力类型不确定性的影响，实现了多源加速退化数据集的融合建模与可靠度评估。

最后，本文针对内场总体特征和外场个体特性存在差异性的情况，基于贝叶斯理论给出了实时剩余使用寿命预测方法，首先根据内场加速退化数据获取产品的总体特征，然后在外场个体信息获取时，采用强跟踪算法不断更新总体特征模型，从而降低其用于个体寿命预测时的不确定性，实现更为准确的剩余寿命预测。

本文研究初步解决了加速退化试验中的混合不确定性表征及量化问题，为实现高可靠长寿命产品科学合理的寿命与可靠性评估结果提供理论支持。

关键词：加速退化试验，随机不确定性，认知不确定性，多源信息，寿命预测

Abstract

To achieve the lifetime and reliability assessment for highly reliable and long lifespan products with the limited constraint, Accelerated Degradation Testing (ADT) has been widely used in many engineering applications. In general, it can provide the population information according to the ADT data from the small number of tested samples. However, traditional ADT modeling methods mainly consider the aleatory uncertainty, e.g. unit-to-unit variation and measurement error, while ignore the epistemic uncertainty due to the imprecise data, model selection and so on, which may lead to partially or totally wrong lifetime and reliability evaluation results. Thus, how to present and quantify epistemic uncertainty and its influences on evaluation results are critical for the research of ADT theory.

To solve this problem, this dissertation will focus on the epistemic uncertainty on ADT and provide the accelerated degradation modeling methods with mixture uncertainty. The following sources in ADT are mainly taken into consideration: 1) imprecise measurement data, 2) limited number of samples, 3) model selection, 4) accelerated stress type selection, 5) population and individual characteristic variation. The main contents of this dissertation are as follows:

At first, this dissertation introduced interval analysis and fuzzy theory to model the imprecise degradation path and deal with the imprecise problem of interval and indirect measured ADT data, and provided the reliability box and fuzzy reliability to quantify the influence of imprecise ADT data on product reliability assessment.

Next, this dissertation studied the lack of belief on accelerated degradation inferences due to the small number of tested samples. With the integration of expert belief on degradation value or path based on uncertain process, the degradation performance of product can be presented and the belief reliability will be given with the uncertain measure, which provides a basis of belief reliability assessment for product at component level.

Then, this dissertation concentrated on the model selection problem of three commonly used stochastic processes in accelerated degradation modeling. A method based on Bayesian model averaging is used to quantify such model uncertainty, which can provide the inferences

for model posterior probability and p -th quantile lifetime to achieve the integration evaluation with multiple stochastic processes.

After that, the integration method for multiple source of incomplete ADT datasets was proposed to study the uncertainty on accelerated stress type. The probability assignment is conducted based on mutually exclusive set theory, which then be used for multiple source data fusion.

Finally, an integrated framework was proposed to deal with the variation in population characteristic from ADT information and field individual characteristic. A Bayesian method is introduced to provide real-time remaining life prediction. The accelerated degradation information is used to produce the prior predictive model for population characteristic. When field data is available, strong filtering algorithm is used to update the population characteristic and decrease its uncertainty for presenting individual characteristic, thus to achieve accurate remaining life prediction.

This dissertation has primary solved the problem of mixture uncertainty presentation and quantification in ADT, which provides the theoretical basis to lifetime and reliability assessments for highly reliable and long lifespan products.

Key words: accelerated degradation testing, aleatory uncertainty, epistemic uncertainty, multiple source information, life prediction

目 录

摘 要.....	I
Abstract	III
目 录.....	V
第一章 绪论	1
1.1 论文选题的背景和意义.....	1
1.2 国内外研究现状分析.....	2
1.2.1 不确定性量化方法.....	2
1.2.2 加速退化建模方法.....	9
1.3 本文研究思路及结构安排.....	14
1.3.1 问题的提出.....	14
1.3.2 研究方案.....	15
1.3.3 论文的结构安排.....	17
第二章 基于区间分析的 ADT 评估方法	19
2.1 问题描述.....	19
2.2 退化模型及区间分析方法.....	19
2.2.1 退化模型.....	19
2.2.2 区间回归分析.....	20
2.3 区间型加速退化试验分析.....	22
2.3.1 基于区间分析方法的加速退化建模.....	22
2.3.2 可靠性与寿命指标.....	24
2.4 案例分析.....	24
2.4.1 加速退化试验信息.....	24
2.4.2 数据非精确性对寿命与可靠度的影响分析.....	26
2.5 本章小结.....	29
第三章 非直接观测 ADT 数据的模糊可靠性评估方法	31
3.1 问题描述.....	31

3.2 基于机械加速试验的模糊可靠性评估	32
3.2.1 退化指标	33
3.2.2 退化模型和加速模型	36
3.2.3 寿命分布选取和模糊可靠性评估	39
3.3 案例分析	40
3.3.1 实验平台	40
3.3.2 数据分析	41
3.3.3 验证与讨论	47
3.4 本章小结	49
第四章 基于不确定过程的 ADT 评估方法	51
4.1 问题描述	51
4.2 不确定理论基础	52
4.3 不确定加速退化建模	54
4.3.1 基于不确定过程的退化模型及加速模型	54
4.3.2 首穿时不确定分布及确信可靠度	55
4.3.3 不确定统计	55
4.4 案例分析	57
4.4.1 应力松弛 ADT 数据集	57
4.4.2 基于算术刘氏过程的确信可靠度评估	58
4.4.3 基于一般刘氏过程的确信可靠度评估	60
4.4.4 敏感性分析	61
4.5 本章小结	63
第五章 考虑随机过程模型不确定性的 ADT 评估方法	65
5.1 问题描述	65
5.2 ADT 评估的统一随机过程模型	66
5.2.1 统一随机过程模型	66
5.2.2 归一化应力的加速模型	67
5.2.3 统计推断	67
5.2.4 p 分位寿命及置信区间	68

5.3 基于贝叶斯模型平均的模型不确定性量化	70
5.3.1 贝叶斯模型平均方法	70
5.3.2 MCMC 实施方法	71
5.4 案例分析	73
5.4.1 极大似然估计分析	73
5.4.2 BMA 分析	75
5.5 仿真案例	77
5.6 本章小结	78
第六章 非完备 ADT 数据的融合评估方法	81
6.1 问题描述	81
6.2 多源非完备 ADT 数据的融合评估方法	82
6.2.1 基于维纳过程的退化模型及多项式加速模型	82
6.2.2 集合理论及概率分配融合方法	82
6.2.3 基于贝叶斯理论的模型更新	86
6.3 仿真案例分析	86
6.3.1 参数设置	87
6.3.2 参数估计及可靠度评估结果	88
6.4 锂离子电池应用实例	90
6.4.1 试验情况及数据收集	90
6.4.2 参数评估	94
6.4.3 可靠性评估与分析	95
6.5 本章小结	96
第七章 结合 ADT 信息的剩余寿命预测方法	97
7.1 问题描述	97
7.2 建模方法	97
7.2.1 集成寿命预测框架	97
7.2.2 外场使用条件下的在线寿命预测	100
7.2.3 参数估计	102
7.3 仿真案例分析	104

7.3.1 线性退化场景仿真	104
7.3.2 非线性退化场景仿真	108
7.4 讨论与分析	112
7.5 本章小结	115
结论与展望	117
附录 A 期望信息矩阵 $I(\theta_c)$	121
附录 B p 分位寿命关于参数 θ 的一阶偏导	125
参考文献	127
攻读博士学位期间取得的研究成果	137
致谢	141
作者简介	143

插图和附表清单

图 1 仅考虑随机不确定性的寿命分布	3
图 2 考虑混合不确定性的寿命分布	3
图 3 博士论文研究方案	16
图 4 区间型加速退化试验分析流程图	23
图 5 三种加载条件下的加速磨损退化试验数据	25
图 6 三种加载条件下的漂移系数	26
图 7 当 $m=0.5$ 时的区间可靠度曲线	26
图 8 两种情况下不同 m 值对应的漂移系数中心值和半径	27
图 9 两种情况下不同 m 值对应的扩散系数	28
图 10 两种情况下不同 m 值对应的可靠度为 0.9 的可靠寿命中心值和半径	28
图 11 机械加速试验的模糊可靠性评估流程	32
图 12 模糊数及其 α 截集	36
图 13 轴承实验平台 ^[149]	40
图 14 三种加速水平下的轴承退化过程及其拟合路径	42
图 15 三种加速使用条件下的模糊加速因子	44
图 16 加速模型中的模糊回归系数	45
图 17 每个寿命分布对应轴承失效时间的得分情况	46
图 18 威布尔寿命分布的模糊参数	46
图 19 (a)轴承在[7,8]小时的模糊可靠度和(b)轴承的模糊 MTTF (小时)	47
图 20 应力松弛恒定应力加速退化试验数据	57
图 21 基于算术刘氏过程的确信可靠度曲线及确信可靠寿命曲线	59
图 22 基于一般刘氏过程的确信可靠度曲线及确信可靠寿命曲线	61
图 23 各样本量下的确信可靠度评估结果	62
图 24 当 $n_i = 1$ 且信度水平 $\alpha = 0.75$ 时的确信可靠度曲线	63
图 25 首穿时的概率密度函数(a)和累计概率密度函数(b), t_p 的极大似然估计值和 95%统计置信区间((c)正常尺度和(d)对数尺度, ∇ 和 Δ 分别表示上界和下界)	75

图 26 (a)t0.01、(b)t0.50 和(c)t0.99 的后验密度（对数尺度）	76
图 27 非完备 ADT 数据集的融合评估方法	85
图 28 非完备 ADT 数据集 1: 三应力水平, 加速应力: 温度	87
图 29 非完备 ADT 数据集 2: 两应力水平, 加速应力: 温度和电应力	87
图 30 可靠度综合评估结果 VS 单一数据集评估结果	89
图 31 考虑与不考虑应力类型相关性的可靠度曲线	90
图 32 磷酸铁锂电池实物图	91
图 33 锂离子电池电应力加速试验平台	91
图 34 锂电池三电应力加速退化试验剖面图（步进应力）	92
图 35 锂离子电池步进应力加速退化试验数据, 加速应力: 放电速率	92
图 36 锂离子电池温度应力加速试验设备	93
图 37 锂离子电池恒定应力加速退化试验剖面, 加速应力: 放电倍率和温度	93
图 38 锂离子电池恒定应力加速退化试验数据, 加速应力: 放电倍率和温度	94
图 39 锂离子电池可靠度综合评估结果 VS 单一数据集评估结果	95
图 40 是否考虑应力集合相关性的锂离子电池可靠度评估结果	96
图 41 基于 ADT 和外场数据的剩余寿命预测框架	98
图 42 线性场景下的(a) 六样本 SSADT 数据和(b) 两样本外场数据	105
图 43 (a) SSADT 参数后验概率密度函数和 (b) 收敛性检验	105
图 44 线性场景下两个案例对应的可靠度曲线及实际曲线	106
图 45 (a) 样本 1 和 (b) 样本 2 剩余寿命的概率密度函数（从第二个监测点到失效前时刻）	107
图 46 线性场景下外场预测路径和实际路径的相对误差	108
图 47 非线性场景下的(a) 十二个样本 CSADT 数据和(b) 两样本外场数据	109
图 48 (a) CSADT 参数后验概率密度函数和 (b) 收敛性检验	109
图 49 非线性场景下两个案例对应的可靠度曲线及实际曲线	111
图 50 图 25 (a) 样本 1 和 (b) 样本 2 剩余寿命的概率密度函数（至失效前时刻）	111
图 51 非线性场景下外场预测路径和实际路径的相对误差	112
图 52 LED 的 CSADT 数据	113
图 53 可靠度曲线: 本章方法、Liao 模型和 Wang 模型	114

图 54 LED 外场剩余寿命的概率密度函数.....	115
表 1 金属合金的加速磨损退化试验信息.....	25
表 2 轴承加速试验的数据集.....	41
表 3 退化模型拟合度对比结果.....	42
表 4 指数退化模型的参数估计量.....	43
表 5 加速和正常条件下的模糊失效时间.....	44
表 6 所有轴承在加速和正常使用条件下的实际失效时间.....	48
表 7 第 i 个加速应力条件下的专家评分法表格.....	56
表 8 电连接器应力松弛的恒定应力加速退化试验信息.....	58
表 9 各加速应力条件下的专家评分结果.....	58
表 10 各退化路径对应的专家累计信度.....	59
表 11 基于算术刘氏过程的参数估计结果.....	59
表 12 基于一般刘氏过程的参数估计结果.....	60
表 13 不同样本量情况下确信可靠度的区间.....	62
表 14 统一随机过程模型未知参数的极大似然解及其标准差.....	74
表 15 M_2 、 M_3 和 BMA 的后验中位值及 95% 统计可信区间 (单位: 小时).....	76
表 16 当伽马过程为真实模型时的 CP 及 AL 指标.....	79
表 17 当逆高斯过程为真实模型时的 CP 及 AL 指标.....	80
表 18 两个非完备 ADT 数据集的仿真参数设置.....	86
表 19 两个非完备 ADT 数据集的参数估计结果及相对误差.....	88
表 20 不考虑应力类型相关性的参数估计结果.....	89
表 21 锂离子电池案例的参数估计结果.....	95
表 22 SSADT 仿真参数设置.....	104
表 23 考虑样本间差异的参数估计结果及相对误差.....	106
表 24 不考虑样本间差异的参数估计结果及相对误差.....	106
表 25 CSADT 仿真参数设置.....	108
表 26 考虑样本间差异的参数估计结果及相对误差.....	110
表 27 不考虑样本间差异的参数估计结果及相对误差.....	110
表 28 LED 的恒定应力加速退化试验信息.....	112

表 29 外场使用的 LED 退化值.....	113
表 30 两种案例下针对 LED 的 CSADT 参数估计结果.....	114

第一章 绪论

1.1 论文选题的背景和意义

现代工业对高可靠长寿命产品有不断增长的需求，为了考核该类产品的寿命与可靠性水平，在产品正式投产之前需开展定量的加速试验。加速试验技术采用严酷于产品正常使用的环境条件，加速产品失效或退化过程，从而在短时间内获取寿命或退化数据进行可靠性和寿命评估^[1]。与寿命数据相比，退化数据包含更多的产品性能变化信息，因此加速退化试验（Accelerated Degradation Testing, ADT）技术得到了较多的关注^[2,3]。如何合理有效地开展加速退化建模是实现高可靠长寿命产品指标考核以及后续维护方案制定的重要内容。

在开展加速退化试验建模过程中，需要辨识：1) 产品的性能随时间和应力的变化规律；2) 试验中存在的 uncertainty。通常来说，产品内在的物理或化学机理易受外在环境条件的改变而发生变化，如产品由于周期载荷发生疲劳或者电化学反应发生腐蚀等，进而通过对外在性能参数的建模来表征产品性能所遵循的确定性变化规律。因此，在加速退化建模中，首先需要辨识出产品性能随时间和应力的变化规律，选取合适的性能退化模型。

而对于 ADT 中存在的 uncertainty 问题，主要来源于受试对象、测试及环境条件，即包括固有不可消除的随机 uncertainty，如样本间物理差异、测量误差等，也包括由于信息缺乏导致的认知 uncertainty，如退化数据的非精确性、退化模型选取带来的模型 uncertainty、加速试验应力类型的 uncertainty、总体特征和个体特征的差异性 etc 等认知 uncertainty，其可通过增加信息加以消除。如果在加速退化建模过程中不能够全面辨识和把握存在的随机和认知 uncertainty（统称混合 uncertainty），可能会导致完全错误的寿命与可靠性评估结果，进而给产品投产使用带来潜在危害，造成巨大的人员和财产损失。

然而，现有加速退化建模方法只考虑了随机 uncertainty 的影响，缺乏对于认知 uncertainty 的量化，从而降低了寿命与可靠度评估结果的可信性。在此背景下，本论文基于加速退化试验数据，综合考虑试验中存在的混合 uncertainty，重点开展数据非精确性、模型选择、加速试验应力选取等认知 uncertainty 的加速退化建模方法研究，为实现高可靠长寿命产品更加准确的寿命与可靠性评估与预测提供技术手段，保障产品安全、可靠投产和运行，具有一定的理论和工程应用价值。

1.2 国内外研究现状分析

本论文旨在研究考虑混合不确定性的加速退化建模方法，因此首先回顾国内外学者对混合不确定性的基本量化方法，主要包括概率理论、区间分析、模糊理论和不确定理论，然后综述现有加速退化建模方法在考虑混合不确定性方面的研究进展。

1.2.1 不确定性量化方法

不确定性可细分为随机不确定性和认知不确定性^[4]。随机不确定性是指固有的变异性，无法消除，是系统的一种属性，如样本间差异、测量误差。针对该类不确定性，通常采用概率理论来加以描述，如随机变量的概率密度函数。而认知不确定性是指缺乏必要知识引起的不确定，可以通过增加知识来降低该不确定性直至消除，是建模者的一种属性，如模型选择、加速应力类型选取等。

Zio[5]和[6]指出开展可靠性分析不仅要关注系统失效发生的随机不确定性及其影响，还要关注量化模型中的认知不确定性。为此，本节针对国内外学者对于认知不确定性的量化方法进行综述，主要包括概率理论、区间分析、模糊理论和不确定理论。

1.2.1.1 概率理论

概率论是最早用于描述随机性的工具。假设 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 为系统输入向量， $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ 为系统输入的随机变量，定义系统失效概率为：

$$p_f = \int_{M=g(\mathbf{X};\Theta_g)\leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X};\Theta_f) d\mathbf{X} \quad (1.1)$$

式中， $M = g(\mathbf{X})$ 为性能表征模型，也称为功能函数， $M \leq 0$ 表示系统失效事件； $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ 为联合概率密度函数。

通常来说，系统的性能参数是一个时间 t 相关的变量，对应于时间相关的可靠性分析理论^[7]。同时，在加速试验技术领域，通过提高应力水平 S ，能够加快模型参数的辨识过程。因而，性能退化模型是一个与时间和应力有关的函数，即 $M(t, S) = g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), t, S)$ 。这里， $\mathbf{Y}(t)$ 是随机过程向量。则系统在 $[0, t]$ 时间内失效概率为：

$$F_T(t, S) = p_f([0, t], S) = \Pr\{M(\tau, S) = g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(\tau), \tau, S) \leq 0, \exists \tau \in [0, t]\} \quad (1.2)$$

假设参数 θ 表示系统中与认知不确定性有关的随机变量，则性能退化模型可进一步表示为 $M(t, S, \theta) = g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), t, S, \theta)$ 。若仅考虑系统中存在的随机不确定性，则系统的失

效概率分布如图 1 所示。而考虑混合不确定性的情况，对于任意一个 $\theta^{(i)}$ ，系统都会有一个相应的失效概率分布，如图 2 所示。

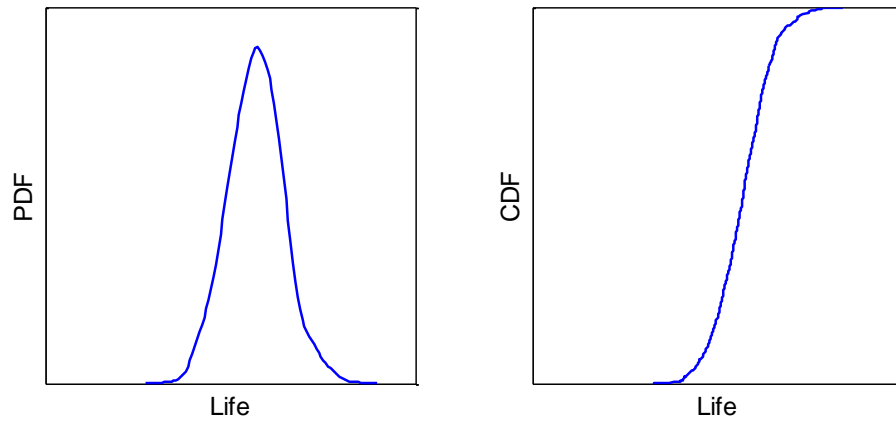


图 1 仅考虑随机不确定性的寿命分布

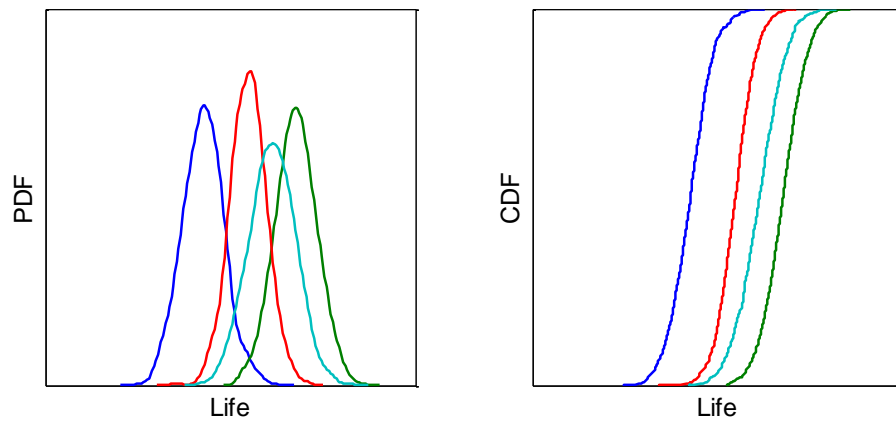


图 2 考虑混合不确定性的寿命分布

概率方法是处理不确定问题最常用的手段，而不确定性与风险息息相关^[8]。1960s 早期，美国 NASA 在研究航空航天和导弹项目时开展了定量的风险与可靠性评估方法研究，并应用在阿波罗项目中，虽然计算得到的载人往返于月球的成功率较低，使得量化风险分析没有得到重视。但是，伴随着核工业的发展以及 1986 年挑战者号事故的发生，促使不确定性与风险评估研究最终形成一套完整的系统概率风险评估方法（Probabilistic Risk Assessment, PRA）^[9,10]，在该方法体系中主要采用了概率方法对复杂系统进行定量的风险评估。Winkler^[11]阐述了 PRA 方法应用在复杂系统中存在的不确定量化问题，并指出不确定性量化的落脚点应该在于模型的构建、概率评估、信息融合和敏感性分析四个方面。Parry^[12]阐述了 PRA 方法中区分随机和认知不确定性的重要性，并对基本事件的不确定性表征、不确定性传递、PRA 结果的理解进行了介绍。Paté-Cornell^[13]针对风

险分析中的不确定性问题提出了六层处理方法，从底层的危害辨识到顶层的风险不确定性表征。Kiureghian 和 Didevsen[14]进一步阐述了区分随机和认知不确定性的重要性，通过不确定性分类来指导降低认知不确定性的方向。

考虑到认知不确定性是对主观认知的量化，在获取新的知识时，决策者可引入贝叶斯方法加以更新。贝叶斯模型评估是一种典型的模型不确定性量化方法，通过获取的数据信息，更新模型的认知不确定性^[15]。Zhang 和 Mahadevan[16]针对机械和统计模型选择以及分布参数的不确定性，提出了一种贝叶斯更新流程，通过无损检测数据来获取更准确的可靠性估计结果。Sankararaman 等人[17]基于贝叶斯网络提出一种疲劳裂纹增长分析的不确定量化与模型验证方法，主要考虑了三类不确定性：载荷和材料属性的固有差异性，测量误差、离散数据和不同监测策略引起的数据不确定性，以及裂纹分析、数值近似和离散有限元引起的模型不确定性与误差，通过全局敏感性分析量化各不确定性源的贡献，最后基于贝叶斯假设检验开展模型验证。Park 和 Grandhi[18]考虑模型形式及模型预测误差引起的不确定性，采用贝叶斯模型平均和修正因子的方法进行综合预测，结果表明该方法能够给出较好的模型后验概率和预测置信区间。

国内方面，西北工业大学宋述芳等人[19]研究了机翼气动弹性的随机不确定性，通过敏感性分析得出模型尺寸、质量比对颤振可靠性影响较小，从而设定其为确定量，仅考虑固有频率为随机变量的情况，结果显示该方法能够得到近似精确解。电子科技大学汤咏[20]研究了航空发动机涡轮盘的疲劳寿命预测问题，考虑了测量误差、预测误差、模型不确定性和参数不确定性四类不确定性源，通过改进型蒙特卡洛法进行不确定性随机变量的抽样，取得了较好效果。北京航空航天大学唐健等人[21]在研究飞机舵面颤振时考虑了弯曲刚度和扭转刚度的不确定性，采用蒙特卡罗法和非侵入式随机多项式法进行不确定性量化分析，结果表明两个方法都具有较高的精度。电子科技大学 Zhu 等人[22]给出了一种基于概率失效物理的疲劳寿命预测方法，采用贝叶斯策略来更新认知不确定性，主要考虑物理变异性、统计不确定性、模型不确定性和误差三类不确定性，根据 GH4133 高温合金和航空发动机高压涡轮盘案例表明该方法能够得到较高的预测精度。

1.2.1.2 区间分析

当采用概率方法来描述不确定性时，需要大量的试验数据来定义参数或者模型的不确定性，但当样本量较少时，传统的概率可靠性评估结果会有较大的偏差。在实际工程中，某些参数的边界是容易获取的，如加速模型中的激活能，根据材料属性能给出一个

范围，如 $[5, 10]eV$ ，但无法通过大量的试验来准确获取该参数，于是可以引入区间分析理论来加以处理，即非概率的分析方法。

20 世纪 50-60 年代，Moore 提出了区间算法^[23]，主要应用于计算浮点数的处理。根据定义，区间数 $[x]$ 是一个有序的实数对组成的闭集，即 $[x^L, x^R] = \{[x] \in \mathbb{R}: x^L \leq x \leq x^R\}$ ，区间 $[X]$ 也可以用它的左右端点来简化表示，即 $[X] = [\underline{X}, \bar{X}]$ 。区间数之间的运算法则仅满足交换律和结合律，而分配律等法则表现较弱。两个区间数的运算法则可表示为^[24]：

$$[a] \circ [b] = \{a \circ b | a \in [a], b \in [b]\}$$

区间分析问题通常转化为一个优化求解问题，根据寻优结果得到关注参数或者响应变量的区间，无需给定概率分布假设，从而适用于数据量少且易知边界条件的情况。一个线性区间问题的优化模型可表示为^[25]：

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i=1}^n [c_i^L, c_i^R] x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n [a_{ij}^L, a_{ij}^R] x_j \leq [b_i^L, b_i^R], i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.3)$$

20 世纪 90 年代，Ben-Haim 和 Elishakoff 研究了凸模型非概率理论，将材料特性的不确定性用凸模型来表征，从而将区间分析方法引入到应用力学领域^[26-28]。随后，Ben-Haim^[29]基于凸模型研究了不确定操作环境或不确定几何缺陷情况下系统的可靠性，提出非概率可靠性的概念，并指出传统的概率可靠性对概率模型的微小误差较敏感，而非概率可靠性则适用于信息不充分的情况，对微小误差不敏感。同时期，Elishakoff 和 Duan^[30]和 Qiu 等人^[31]将区间分析方法引入到结构不确定性分析。Tanaka 和 Lee^[32]针对区间回归分析方法的参数求解问题，采用二次规划方法构建优化模型，优化目标具备最小二乘分析的中心趋势性和模糊回归分析的可能性特性，从而具有优良的数学特性。进入 21 世纪，区间分析方法在力学不确定性建模^[33]、电力系统载荷不确定性^[34]、结构不确定性分析与容差分配^[35, 36]等领域得到了广泛的应用。

上述研究主要用区间分析解决系统中存在认知不确定性的表征与量化问题，然而在实际情况下随机和认知不确定性同时存在，因而概率方法与区间方法的结合是不可避免的。Weichselberger^[37]给出了区间-概率情况下的条件概率、贝叶斯理论框架，便于混合不确定性的计算。Kreinovich 等人^[38]综述了目前工程中处理概率和区间不确定性的算法及其计算复杂度。此外，部分学者将区间不确定性用概率方法表示，从而避免了区间运算法则，仅依赖于抽样原理研究概率框架下的混合不确定性^[39, 40]。

国内方面,北京航空航天大学邱志平教授做了大量工作,将区间分析方法引入到工程结构的不确定性量化分析中^[31,36,41],提出改进的区间能度可靠性和图标方法两种非概率区间可靠性指标^[42]。郭书祥等人^[43]基于区间分析,提出一种新的非概率可靠性度量指标。苏静波和邵国建^[44]从不确定性结构系统的区间有限元分析、基于区间的非概率可靠性分析、工程结构区间反演分析、基于区间参数的结构优化设计四个方面,综述了2005年以前区间分析在工程结构不确定性的研究进展。姜潮^[25]研究非线性区间数优化问题,提出多网络和单网络两种混合优化算法,提高了非线性优化的计算效率。针对混合不确定性的情况,刘继红等人^[45]提出一种基于概率论和凸集理论的随机与区间不确定性下的序列化多学科可靠性分析方法,采用耦合循环解耦手段来提高计算效率。

针对1.2.1.1节的性能表征模型 $M(t, S, \theta) = g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), t, S, \theta)$,同样认为参数 θ 表征认知不确定性,为区间型变量,因此模型也为区间型 $[M] = [\underline{M}, \overline{M}]$ 。文献^[43]定义了一种非概率可靠度指标为:

$$Z = \frac{M^c}{M^r} = \frac{\overline{M} + \underline{M}}{\overline{M} - \underline{M}} \quad (1.4)$$

式中, M^c 和 M^r 分别为区间变量 $[M]$ 的均值和离差。当 $Z > 1$ 时,对应于 $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), t, S, \theta) > 0$,则系统可靠;当 $Z < -1$ 时,对应于 $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), t, S, \theta) < 0$,则系统不可靠;当 $-1 \leq Z \leq 1$, $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), t, S, \theta) > 0$ 和 < 0 均有可能存在,则系统处于中间不确定性状态,通常不能认为系统是可靠的。

1.2.1.3 模糊理论

模糊性适用于描述人类的语言,是与随机性不同的一种不确定性,即无法给出明确的定义或者无法获取边界的一种模糊概念。例如,“明天下雨的可能性是70%”,“中等身高应该在1.6~1.75米左右”。因此,可采用模糊理论来描述和量化该类认知不确定性,并给出合理的推断与决策。

1965年,Zadeh^[46]首次提出了模糊集的概念。之后,Zadeh^[47]于1978年提出了可能性理论(Possibility Theory),进而模糊理论成为描述认知不确定性的一种重要手段。根据定义,模糊数 \tilde{X} 由范围在 $[0, 1]$ 之间的隶属度函数 $\mu_{\tilde{X}}(x) \in [0, 1]$ 表示。

假设有事件 A ,可能性理论通过定义可能性(Possibility)测度和必要性(Necessity)测度来表征事件 A 的概率界,即

$$Pos(A) = \sup_{x \in A} \mu_{\tilde{X}}(x) \quad (1.5)$$

$$Nec(A) = 1 - Pos(\bar{A}) \quad (1.6)$$

1991年, Cai等人[48]指出在小样本的情况下, 传统的可靠性理论不适宜用概率理论来描述, 于是引入了可能性理论, 基于二态假设(故障和正常)提出了能双可靠性理论。随后, Cai等人[49]针对一般系统: 串联系统、并联系统、马尔科夫模型、混合模型和单调并联系统, 给出了其能双可靠度的计算方法。紧接着, Utkin和Gurov[50]在能双可靠性的理论框架下, 基于系统功能函数给出了任意可修和不可修系统的模糊可靠性计算方法。Guimarães和Ebecken[51]考虑非充分信息情况下危险事故发生频率不能用传统概率加以描述, 结合模糊理论提出一种模糊故障树分析方法, 通过最小割集的方法评价顶事件的可靠性水平。Huang等人[52]针对小样本非精确寿命数据的情况, 提出一种贝叶斯模糊可靠性推断方法, 采用遗传算法优化得到寿命分布参数的模糊隶属度函数, 给出系统模糊可靠性指标。

针对随机和认知不确定性同时存在的情况, 一些学者提出了模糊随机和随机模糊的概念。黄洪钟等人[53]针对工程设计中存在随机应力和模糊强度的情况, 通过模糊隶属度函数表征结构强度的不确定性, 给出了系统安全状态下的模糊可靠度计算方法。Moller等人[54]考虑结构随机模型的不确定性参数为模糊数, 根据模糊随机变量理论提出了模糊概率安全度的概念, 并采用模糊一阶可靠性方法进行安全度评价。Kala[55]研究了存在随机和模糊不确定性情况下的钢结构稳定性问题。Möller和Beer[56]考虑结构和计算力学中的不确定性, 给出了存在模糊随机状态下的系统可靠性评估方法。马瑞等人[57]采用模糊随机变量和区间变量分布描述风电功率和负载预测值的不确定性, 开展电力系统调度的优化。Li等人[58]研究了随机和认知不确定性下的多态系统可用性和可靠性评估问题, 采用模糊随机变量来表征两类不确定性, 基于发生函数法进行不确定性的传递, 结果显示该方法比传统的蒙特卡洛方法更有效。

1.2.1.4 不确定理论

当缺乏必要的知识和信息时, 必须借助于专家等人的主观经验来给出量化结果, 大量案例表明这些非精确的数值既不表现为随机也不表现为模糊。若采用概率或者模糊的方法加以量化, 会得到与事实不符的结论。为了解决该问题, 清华大学刘宝碇于2007年提出不确定理论^[59], 并于2010年完善了不确定理论^[60], 给出了不确定规划、不确定风

险分析、不确定可靠度分析、不确定过程等定义，使其成为一种处理人的不确定性的公理化数学工具。

在不确定理论框架下，Liu[61]定义了系统正常工作的不确定测度为系统可靠性指标，即

$$\text{Reliability} = \mathcal{M}\left\{R\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\right) \geq 0\right\} \quad (1.7)$$

Zeng 等人[62]指出传统的概率测度方法在量化认知不确定方面会存在与实际不符的结论，基于不确定理论提出一类新的可靠性指标：确信可靠度 R_B 、确信可靠寿命 BL 等，并给出了静态和动态系统确信可靠度的计算方法。此外，Zeng[63]给出了典型确信可靠度函数的失效率计算方法。之后，Zeng 等人[64]开展基于失效物理的故障行为建模研究，并指出确信可靠度是一种综合考虑了设计裕量 m_d 、固有不不确定性 σ_a 以及认知不确定性 σ_e 的可靠性度量指标^[65]，通过对产品研发阶段工程活动进行量化，来确定产品的认知不确定性水平^[66]，进行了一定的工程应用^[67]。

$$R_B = \Phi\left(\frac{m_d}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_e^2}}\right) \quad (1.8)$$

近期，Wen 和 Kang[68]研究了系统的部件存在丰富/稀缺样本的状态，基于机会测度（泛化的概率理论和不确定理论）开展不确定随机系统的可靠性分析。

在结构可靠性领域，在数据信息缺乏的情况下，较多学者假设应力和载荷为模糊变量，然而模糊理论在解释主观不确定性方面存在不足，使得评估结果与实际不符。为此，王倬[69]将不确定理论引入到结构可靠性分析中，假设结构应力与载荷为不确定变量，从而基于不确定测度分析结构可靠性指标，并给出了串联、并联状态下的结构可靠性指标计算方法，类似研究工作还有[70]、[71]。

1.2.1.5 小结

针对四类认知不确定性量化方法，Aven 和 Zio[72]指出非概率方法在缺乏知识情况下对专家经验表征的优势。总得来说，处理不确定性方法可分为概率方法、非精确概率方法^[73]和不确定理论，本节综述的四类不确定性量化方法都能够很好地表征认知不确定性的影响，指导实际工程中的不确定性建模。

总结如下：

- 1) 概率方法易于理解，理论成熟，能够直接用于表征随机不确定性，因而基于概

率理论的混合不确定性量化方法应用较为广泛。该方法存在的问题是需要大量的数据或者丰富的信息来构造表征不确定性的随机变量，而在实际工程中，专家经验或知识等较为缺乏；

- 2) 区间方法适用于仅能给出上下界的经验或专家知识，一般来说在信息缺乏的情况下，没有大量数据来获取某参数的分布函数，区间方法能够给出很好的表征。然而区间分析方法易受变量间交互作用的影响，使得响应变量的区间严重扩张，不利于决策；
- 3) 模糊方法可以看做非精确信息的一种自然表征，通过构建隶属度函数将信息缺乏状态下的所有知识集中起来，因此模糊理论是最常见的处理非精确信息方法。然而该方法在模糊变量运算方面较为复杂，涉及大量的抽样运算，且模糊变量的隶属度函数定义没有统一的标准，在实际使用时应加以注意；
- 4) 不确定理论是描述主观不确定性的理想工具，解决了区间和模糊方法在实际使用中存在与事实不符的结论。然而该方法在工程应用方面研究较少，相关工作还需进一步开展。

1.2.2 加速退化建模方法

伴随着高可靠、长寿命产品的出现，如 LED^[74]、电容器^[75]、电池^{[76, 77][78]}、MOSFET^[79]等，传统的可靠性试验技术在时间和经济成本上，已经无法满足现代产品对于开发周期短、效费比高的需求。为此，国内外重点研究加速试验技术，实现了快速的可靠性评估^[80, 81]。一般来说，产品内在物理退化过程可通过外在的性能参数来表征，如 IGBT 的集电极-发射极电压^[82]、电池容量^[83]等，从而有助于加速退化建模工作的开展。

Meeker 和 Escobar^[84]对早期加速试验研究进行了综述，指出加速试验技术需重点关注：试验方案、数据模型、模型分析方法、图演示和相似产品的模型与数据分析，同时时期的研究还有 Elsayed 和 Chen^[85]。Meeker 等人^[2]对加速退化试验的退化建模、加速模型、退化和失效相关模型与分析进行了详细地阐述，对后续加速退化试验的应用具有重要的指导意义，其同时指出未来研究的重点在于退化失效建模、多失效机理、复杂模型推断。文献^[86]和^[87]对工程中常用的加速模型进行了详细阐述。文献^[3, 88, 89]主要总结了 20 世纪 80 年代至 20 世纪末 ADT 的研究成果。

本节综述现有加速退化建模方法，回顾其在考虑不确定性方面的研究进展，主要包括基于物理和基于统计数据驱动两类方法。

1.2.2.1 基于物理的建模评估方法

基于物理模型的加速退化建模结合产品性能退化的失效机理,如疲劳、腐蚀、磨损、老化等,采用相应的物理退化机理模型来表征产品的退化模型,其模型参数具有相应的物理含义,从而基于不同应力条件下的退化数据辨识出退化模型参数,能够准确有效地开展产品可靠性评估。

在描述**样本间差异性**方面, Wang 和 Dragomir-Daescu[90]针对小感应电动机开展加速退化试验,通过振动信号处理提取出一种表征电机轴承磨损的退化指数:轨道面积,然后依据磨损模型和统计分散性构建出失效时间-退化模型,评估其可靠度。Huard 等人[91]研究了 p-MOSFET 的负偏压温度不稳定性,通过对大范围应力条件下的晶体管参数进行分析,确定出引起 NBTI 退化的关键因素,并构建出一个失效诱发模型来解释表面陷阱密度的幂律动态演化趋势,该模型能很好地吻合实验结果。

Thomas 等人[77]基于经验物理退化模型研究了锂离子电池的寿命评估问题,采用一种方差模型来表征**测量误差及样本间的差异性**,依据温度和充电深度两种加速应力条件下的退化数据辨识模型参数,并基于蒙特卡洛仿真给出正常应力条件下的寿命预测值及其置信区间,文中指出在寿命预测时需要考虑正常应力的动态特性。Cheng 等人[76]通过对锂亚硫酰氯(Li/SOCl₂)电池开展温度应力下的加速退化试验,依据试验数据构建电池退化的统计先验预测模型,通过仿真验证该模型能够准确地吻合试验数据,同时能够很好地预测其他温度条件下的退化过程。

综上所述,基于物理的 ADT 评估方法能够给出较为准确的评估结果,且模型参数具有物理含义。因而在不确定性表征方面,该模型适用于描述**测量误差、样本间差异**等随机不确定性以及**模型参数**的认知不确定性。然而,在实际工程中很难通过机理分析,确定其内在物理机理与外在性能参数之间的关系,因此基于物理的评估方法应用范围有限。

1.2.2.2 基于统计数据驱动的建模评估方法

加速退化试验数据表征了产品性能参数随时间和应力条件的变化,蕴含着产品的失效机理信息,通过这些数据可以从统计意义上辨识出产品的性能表征模型,而无需已知产品物理信息,即可开展产品寿命与可靠性评估。因而,基于统计的 ADT 建模评估方法得到广泛应用。目前,基于统计的加速退化建模方法主要可分为基于退化路径和基于随机过程两类。

1.2.2.2.1 退化路径

退化路径建模方法又称直接建模方法，主要有：线性、凹模型、凸模型，其一般形式可表示为^[2]：

$$y_{ij} = D_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (1.9)$$

式中， $D_{ij} = D(t_{ij}, \beta_i)$ 是第 i 个产品在 t_{ij} 的实际路径， $\beta_i = (\beta_{1i}, \beta_{2i}, \dots, \beta_{ki})$ 为 k 维未知向量，误差项 ε_{ij} 描述测量误差。

在考虑**测量不确定性**（测量误差）方面，Yang 和 Yang[92]采用线性退化路径模型建立寿命、退化临界值与应力之间的关系。Ebrahem 和 Higgins[93]提出一种比例磨损模型描述加速退化数据，通过非参数手段估计平均退化曲线和加速系数，以及正常应力条件下失效时间的点估计和 Bootstrap 区间估计，拟合优度检验结果表明该模型比时间尺度模型（Time-scale model）更好地拟合滑动金属磨损数据。Wang 和 Chu[74]采用非线性函数对光条加速退化路径进行建模，模型考虑了参数变化和测量误差的影响。

在考虑**测量不确定性**的基础上，部分研究考虑了**样本间差异性**的随机效应影响。Lu 和 Meeker[94]和 Park 和 Bae[95]采用混合效应模型描述受试对象的退化路径，即 $D_{ij} = D(t_j, \Phi, \Theta_i)$ ，这里 Φ 表示固定效应的参数向量， Θ_i 表示第 i 个样本随机效应的参数向量，关于此类随机系数模型的研究可见文献[96]。此外，Pan 和 Crispin[97]提出一种退化路径分层建模方法描述 LED 的性能退化过程，假设退化参数服从正态分布从而来描述试验单元退化路径的差异性，通过 ADT 数据分析可知该方法能够灵活地对复杂退化过程进行建模。Gao 等人[98]采用固定效应和混合效应模型分别开展了监测发动机涡轮叶片有效裂纹长度的能力评价，构建了不同应力条件对振动热成像监测响应的模型来开展分析。

部分学者针对**退化数据的非精确性**带来的认知不确定性问题开展建模研究。Wang 等人[99]开展了模糊退化数据下的多态系统可靠性分析研究，给出了模糊退化路径参数的求解方法。Gonzalez-Gonzalez 等人[100]考虑参数的不确定性能够表征产品退化的多种不确定性，因此选取参数的置信区间构建模糊隶属度函数，基于非线性模糊回归开展模糊可靠度评估。

综上所述，退化路径建模方法能很好地描述产品的性能退化过程，在 ADT 数据处理中有着广泛的应用。退化路径建模能够描述随机不确定性，包括**测量不确定性**和**样本间的差异性**，部分研究考虑认知不确定性的影响，包括**退化数据的非精确性**。然而对产

品本身而言，其内在退化受材料、环境的影响，同时还存在产品性能退化的**瞬时不确定性**等随机不确定性，该劣势在一定程度上限制了退化路径建模方法的应用^[101]。

1.2.2.2.2 随机过程

随机过程具有时间相关的结构，因此能够很好地描述退化过程的瞬时不确定性以及试验环境的随机影响，因而在近二十年开展了较多研究。Ye 和 Xie[102]详细综述了常用的随机过程模型及其在退化建模、方案设计、老化阶段评估的应用。van Noortwijk[103]详细综述了伽马过程在维护优化方面的应用。

目前，维纳过程（又称漂移布朗运动）、伽马过程、逆高斯过程是最常用的三种随机过程。其中，线性或者可线性化的维纳过程由于其形式和计算过程较为简单，应用最广，即

$$X(t) = x_0 + \mu t + \sigma B(t) \quad (1.10)$$

式中， $X(t)$ 为 t 时刻性能退化值， μ 和 σ 分别为漂移系数和扩散系数， $B(t)$ 是标准布朗运动。此类模型能够较好地描述**样本间差异性和退化瞬时不确定性**等随机不确定性。需要指出的是：维纳过程适用于描述具有增量有增和减特性的退化过程，而伽马过程和逆高斯过程具有独立、非负增量的特点，能够用于描述具有单调趋势的退化过程，因而在工程中广泛用于描述损伤或者裂化过程。

在描述**退化瞬时不确定性**方面，Whitmore 和 Schenkelberg[104]针对非线性加速退化数据，首次提出了基于时间尺度变换维纳过程的 ADT 建模方法。Padgett 和 Tomlinson[105]针对同时存在加速退化和失效数据的情况，基于高斯过程模型给出了统计推断方法。随后，Park 和 Padgett[106]扩展到几何布朗运动和伽马过程模型。Park 和 Padgett[107]基于广义累计损伤理论推导出多应力类型的加速试验模型，分别采用布朗运动过程、几何布朗运动过程和伽马过程表征产品的退化过程。针对多退化过程的情况，Pan 和 Balakrishnan[108]采用两维 Birnbaum–Saunders 分布表征退化过程的相关性，基于伽马过程给出了可靠度建模与评估的方法。Ling 等人[109]给出了基于伽马过程的加速退化建模方法，文中假设形状和尺度参数都与应力相关，推导出可靠性、平均寿命和剩余寿命的函数。Wang 和 Xu[110]首次将逆高斯过程模型引入到退化数据分析中来，给出两种参数估计方法。

在考虑**样本间差异性**方面，Wang[111]假设维纳过程的漂移系数为随机变量，该处理方法成为后续研究该不确定性的通用手段。Tang 等人[112]基于时间尺度变换的维纳过

程研究了恒定和步进应力非线性加速退化试验的建模方法,假设加速模型(即漂移系数)的参数为随机变量来刻画样本的差异性。针对时间尺度变换不适用非线性退化过程的情况, Wang 等人[101]给出了一种通用维纳过程模型,并将线性漂移布朗运动模型纳入到该模型的特例中,能更好地描述线性和非线性退化过程。考虑到某些产品的退化波动性随退化率增加而增大, Ye 等人[113]提出一种扩散系数与漂移系数相关的维纳过程。Lawless 和 Crowder[114]基于截尾伽马过程模型,通过增加一个随机效应项表征该差异性,从而开展裂纹增长数据的寿命评估。Ye 和 Chen[115]提出了三种随机效应的逆高斯过程来表征样本间差异性:随机漂移模型、随机波动模型、随机漂移-波动模型,并给出了相应的参数估计及模型选择方法,同时指出逆高斯过程与伽马过程具有类似的性质,但其结构形式更加灵活,类似的研究工作还有[116]。考虑主观先验信息存在的情况, Peng 等人[117]基于逆高斯过程模型,提出一种贝叶斯框架下的退化分析方法。

在考虑**测量不确定性**(测量误差)方面, Whitmore[118]给出了等时间间隔的线性维纳过程统计推断方法, Peng 和 Hsu[119]扩展到非等时间间距的情况。Si 等人[120]在此基础上研究了寿命预测与维护策略的制定方法。之后, Ye 等人[121]基于带时间尺度的维纳过程和混合效应,研究了存在**测量不确定性和样本间差异性**下的退化建模方法,相关研究还有[122, 123]。近期, Li 等人[124]研究了加速退化试验中存在的**测量不确定性**问题,基于双时间尺度维纳过程给出了加速退化建模与可靠度评估方法。

在处理**多种随机不确定性**方面, Peng 和 Tseng[125]基于线性退化过程研究了是否考虑**样本间差异性、退化瞬时不确定性**(时间相关结构)和**测量误差**的退化建模方法,对寿命评估结果的影响。此外, Si 等人[126]也针对瞬时差异性、样本间差异性和测量差异性,基于线性维纳过程研究了**三类不确定性**下的剩余寿命预测问题。

针对**模型不确定性**问题, Tsai 等人[127]分析了错误定义伽马和维纳退化模型对产品 MTTF 的影响,结果指出:若采用维纳过程拟合伽马型退化数据, MTTF 的预测精度易受阈值与伽马过程尺度参数的比值的影 响,同时当伽马过程形状和尺度参数较大的时候,这种影响也比较大;然而,若采用伽马过程拟合维纳型退化过程,则影响较小。

针对**加速应力的不确定性**问题, Liao 和 Elsayed[128]考虑了外场应力的随机不确定性,基于线性漂移布朗运动提出一种产品外场可靠度预计的统计推断过程。Pan 和 Balakrishnan[129]考虑了步进应力 ADT 中应力提高时间点的随机不确定性,研究了基于维纳过程和伽马过程的多步加速退化试验模型,应用贝叶斯 MCMC 方法获取 MLE 解析解。

在考虑内场总体和外场个体特性差异性方面，Wang 等人[130]提出一种基于两个修正因子的贝叶斯融合评估方法，分别修正了内外场在漂移系数（即加速模型）和扩散系数的差异性，根据 DIC 指标选取两个参数的最优分布形式，从而开展可靠性评估工作。Wang 等人[131]和[132]分别基于维纳过程和伽马过程研究基于 ADT 信息的实时寿命预测问题，首先采用 ADT 数据给出产品总体信息，然后在实时数据可获取时，基于贝叶斯理论实时更新模型参数，从而表征产品的个体特性来实现动态可靠度评估。

综上所述，基于随机过程的加速退化建模评估方法在工程中得到了广泛应用，主要考虑退化瞬时不确定性、样本间差异性、测量误差等随机不确定性。但对于随机过程模型选择、试验应力选取、内外场产品特性差异等引起的认知不确定性研究较为有限。因而，在常规加速退化建模基础上，需要进一步研究认知不确定性的对产品寿命与可靠性评估结果的影响。

1.3 本文研究思路及结构安排

1.3.1 问题的提出

概括起来，现有加速退化建模中主要考虑以下混合不确定性来源：

- 1) 随机不确定性：样本间差异性、退化瞬时不确定性、测量误差；
- 2) 认知不确定性：数据非精确性、模型不确定性、内场总体和外场个体特性差异性。

由国内外文献可知，研究学者在不确定量化方法及加速退化建模方面取得了丰硕的研究成果，通过总结分析，认为加速退化建模方法在考虑混合不确定性方面还存在以下问题：

- 1) 加速退化建模中数据不确定性的量化问题

目前基于统计的加速退化建模方法，主要基于精确加速退化数据，考虑样本间差异、退化瞬时不确定性、测量误差等随机不确定性，而对于非精确、非直接观测数据和小样本数据的认知不确定性量化研究相对较少。因此，Chateaufneuf[133]指出需要采用适当的建模方法来评估认知不确定性对 ADT 评估结果的影响。

- 2) 模型不确定性对于寿命与可靠度评估的影响

常规加速退化建模方法主要基于某一特定随机过程模型开展统计分析，然而在实际工程中，建模者可以选取维纳、伽马和逆高斯三种随机过程模型，忽略模型不确定性的

影响可能会导致完全错误的寿命评估结果。因此，如何量化和度量随机过程模型不确定性对寿命与可靠度评估结果的影响还缺乏研究。

3) 试验应力类型不确定性带来的多源非完备数据融合评估问题

受试验资源和能力限制，内场 ADT 试验仅能部分模拟产品的实际使用条件，因而获取的 ADT 数据集为非完备数据。为了开展准确的可靠度评估工作，需要结合相似产品信息或相同产品其他研发阶段的（加速）试验数据，该类多源数据对应的试验应力类型通常存在差异性。现有研究主要集中在相同应力类型下的 ADT 数据融合评估，而针对试验应力类型存在差异的多源非完备数据融合还有待进一步研究。

4) 内场总体特征与外场个体特征差异性

基于 ADT 数据得到的是产品总体特征信息，而在产品外场实际使用时主要关注于个体特征，二者的差异性所带来的认知不确定性会影响产品寿命预测精度。目前学者提出了基于修正因子和贝叶斯方法的信息校对与更新方法，取得了一定的成果。然而，总体特征与个体特征在环境载荷、样本间差异性等多个方面都存在较大差别，因此如何合理地量化两类特征差异性还缺乏研究。

1.3.2 研究方案

通过对于本领域国内外的研究现状进行综述，本论文基于加速退化试验信息，综合考虑随机和认知不确定性，开展加速退化建模方法研究，主要包括针对 ADT 数据不确定性的基本量化方法研究、考虑随机过程模型不确定性的 ADT 建模方法研究、多源非完备 ADT 数据的融合评估方法研究以及结合 ADT 信息的剩余寿命预测方法研究。

本论文的具体研究方案如图 3 所示。首先，在国内外相关文献调研分析的基础上，建立适用于描述加速退化试验数据不确定性的基本量化方法，并重点对区间分析、模糊理论、不确定过程等方法开展研究，构建可靠度盒子、模糊可靠度、确信可靠度来量化退化数据不确定性的影响；其次，基于贝叶斯模型平均方法研究随机过程模型不确定性对寿命与可靠性评估结果的影响；再次，针对多源非完备加速退化数据的情况，基于集合理论和贝叶斯方法研究应力类型的不确定性问题，重点考虑试验应力类型不确定下的融合评估问题，给出寿命与可靠度计算模型并对比分析评估结果；最后，针对新研高可靠长寿命产品，研究基于 ADT 的内场总体特征构建方法及外场模型的实时更新方法，在建模过程中考虑总体和个体特征差异性，通过不确定性量化与模型更新，降低认知不确定性的影响，给出准确的剩余寿命预测结果。

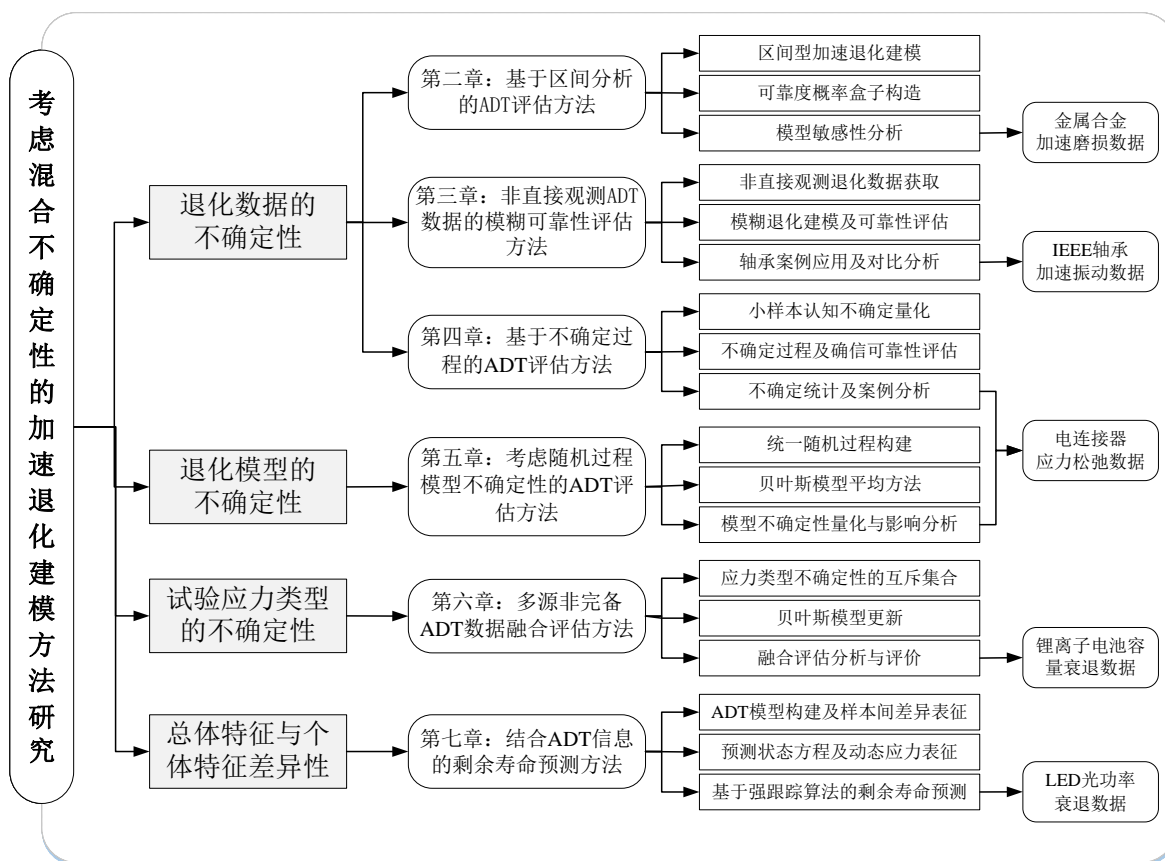


图 3 博士论文研究方案

1) ADT 数据不确定性的基本量化方法研究：针对不确定性的量化方法主要有概率理论、区间分析、模糊理论和不确定理论，通过国内外研究现状可知：为了刻画随机和认知不确定性共存的情况，除了采用两层概率表征方法外，还有概率-区间、概率-模糊及不确定理论等。为此，论文在现有基于随机过程和退化路径的退化建模基础上，主要研究基于概率-区间、概率-模糊、不确定过程的加速退化建模方法，分别解决由测量误差、设备容差所引起的区间型非精确 ADT 数据、非直接观测 ADT 数据以及小样本状态下的可靠度评估问题。主要研究内容包括：基于区间分析的加速退化评估方法、基于模糊回归的加速退化评估方法、基于不确定过程的加速退化评估方法。

2) 考虑随机过程模型不确定性的 ADT 评估方法研究：现有基于随机过程模型的加速退化研究主要考虑了退化过程、样本间差异、测量误差等随机不确定性，然而对于随机过程模型的选择不确定性方面，目前还没有相关研究。为此，本论文研究考虑随机过程模型不确定性的可靠度建模方法，基于贝叶斯模型平均给出各模型的后验概率及特征量（如分位寿命、可靠度等）的后验统计量，通过模型融合来量化模型不确定性，并开展模型的敏感性分析。主要研究内容包括：基于贝叶斯模型平均的模型不确定性量化、基于参数后验的可靠度评估。

3) 多源非完备 ADT 数据的建模与分析方法研究: 产品在外场实际使用过程中通常需要经历多种应力类型, 如湿度、温度、振动等, 然而在内场开展定量加速试验时, 通常受试验设备的约束, 有时候仅能开展一种或两种应力类型的试验, 为了更为合理的评估产品寿命与可靠度, 需要引入其他阶段的变应力类型的试验数据或者相似产品信息, 因此定义这类含有变应力类型的 ADT 数据为非完备 ADT 数据。本研究将主要针对应力类型不同引起的数据不确定性问题, 开展非完备 ADT 数据的融合建模与分析方法研究, 基于互斥集合方法进行各应力集的概率分配, 从而构造全部数据集的似然函数, 开展综合评估。同时考虑有先验信息的情况, 开展基于贝叶斯理论的可靠度评估。主要研究内容包括: 基于互斥集合的多源非完备 ADT 数据融合建模方法、基于贝叶斯理论的可靠度评估方法。

4) 结合 ADT 信息的剩余寿命预测方法研究: 针对高可靠长寿命产品而言, 其外场寿命预测需要较高的时间成本来收集退化信息, 而 ADT 能够提供产品总体的退化信息, 为此本论文就如何结合 ADT 信息开展实时寿命预测进行研究。同时, 与常规基于 ADT 的样本总体可靠度评估不同, 产品在实际使用关注于个体特征, 开展实时剩余寿命预测。本研究首先基于 ADT 信息构建表征样本总体特征的先验预测模型, 然后根据加速模型关系给出状态转移模型, 并结合实时监测数据更新模型参数, 从而减低总体特征的不确定性, 使得实时剩余寿命预测结果更加准确合理。主要研究内容包括: 基于 ADT 信息的先验预测模型构建与分析、外场状态转移模型构建与参数评估方法、实时剩余寿命预测与评价。

1.3.3 论文的结构安排

本论文共分八章, 具体安排如下:

第一章为绪论, 简要阐述了论文的选题背景和研究意义, 着重分析了不确定性量化方法及加速退化建模方法的国内外研究状况和发展趋势, 总结了目前加速退化建模研究中需要解决的问题, 确立了本论文的研究方案和结构安排。

第二章到第四章主要解决加速退化数据不确定性的量化建模问题。

具体来说, 第二章针对区间型非精确 ADT 数据, 提出一种基于区间分析的加速退化评估方法, 通过构造可靠度盒子量化认知不确定性的影响。

第三章针对非直接观测 ADT 数据, 提出一种基于模糊回归的加速退化评估方法, 通过典型机械产品——轴承的振动数据来开展模糊可靠度评估。

第四章针对小样本 ADT 带来的认知不确定性问题，基于专家经验给出退化数据或退化轨迹的信度水平，提出一种基于不确定过程的加速退化评估方法，给出组件级产品的确信可靠性评估方法。

第五章主要解决加速退化评估中随机过程模型选择的不确定性，基于贝叶斯模型评估方法量化模型不确定性对产品正常使用条件下寿命评估结果的影响。

第六章主要解决多源非完备 ADT 数据存在试验应力类型的不确定性，基于互斥集合理论提出一种多源非完备 ADT 的融合评估方法，并给出有先验信息的贝叶斯更新方法。

第七章主要解决在内场基于 ADT 信息的总体特征与外场实时预测的个体特征之间存在差异性的问题，提出一种集成预测框架，采用 ADT 数据构造先验预测模型，并给出实时预测的状态转移模型来刻画动态载荷的不确定性，根据实时采集性能参数来开展实时剩余寿命预测。

最后，对全文研究成果和创新点进行了总结，并对进一步的研究方向给出了展望。

第二章 基于区间分析的 ADT 评估方法

常规加速退化试验评估方法基于精确退化数据进行可靠性和寿命评估，然而受测量等不确定因素影响，试验数据可能是区间型非精确数据。针对此类问题，本章基于维纳过程提出一种基于区间分析的加速退化试验评估方法。

2.1 问题描述

常规加速退化试验评估方法假设采集到的退化数据是精确数据，该假设可能与一些实际情况不符，这些不符来源于测量设备的容差、测试人员对数据读取的偏差或数据的缺失等。因此，在实际试验中可能获取到的是区间型退化数据。若只对其进行简单的均值处理，则忽略了其蕴含的认知不确定性，那么就会给出不合理的寿命和可靠性评估结果。而区间分析方法能够很好地刻画该类认知不确定性，给出考虑随机和认知不确定性的寿命与可靠性评估结果，并能通过敏感性分析定量给出认知不确定性对评估结果的影响，最大程度地保证评估结果的可信性，为消除认知不确定性或评价决策风险提供依据。

因此，本章针对区间型加速退化数据的认知不确定性，采用区间回归方法进行建模分析，解决区间型加速退化试验数据的寿命和可靠性评估问题。本章首先介绍所采用的模型及区间分析方法，其次研究了基于区间分析方法的加速试验数据分析方法，最后通过数值案例验证所提方法，并分析数据非精确性的影响。

2.2 退化模型及区间分析方法

2.2.1 退化模型

随机过程具有较好的物理和统计特性，广泛用于描述产品的性能退化过程^[102]。其中，维纳过程常用于加速退化试验评估^[107, 129, 134]，文献[101]给出了一种通用维纳过程模型，该模型能够泛化成各类常用的维纳过程模型。本章取产品退化性能参数 $X(t)$ 的模型为

$$X(t) = \mu\Lambda(t) + \sigma B(\Lambda(t)) \quad (2.1)$$

若初始退化值 $X(0)$ 不为 0，则 $X(t) = X(t) - X(0)$ 。式中， σ 为扩散系数， $B(\cdot)$ 为标准布朗运动， $\Lambda(t)$ 为关于时间 t 的非减函数，即时间尺度变换，常见变换方式有指数、对数、幂， μ 为漂移系数，通常假设其与应力条件服从对数线性关系（如温度应力下的 Arrhenius 模型，

电应力下的 Eyring 模型等^[86])

$$\ln(\mu) = \beta_0 + \beta_1 \varphi(s) \quad (2.2)$$

式中, $\varphi(s)$ 为应力相关的函数; β_0 和 β_1 为常数。

由维纳过程性质可知, 退化增量满足

$$\Delta X_i \sim N(\mu \Delta t_i, \sigma^2 \Delta t_i) \quad (2.3)$$

式中, $\Delta X_i = X(t_i) - X(t_{i-1})$, $\Delta t_i = \Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1})$ 。

当失效阈值为 ω 时, 产品首次穿过该阈值的时间 T (首穿时) 服从变换后的逆高斯分布^[135], 即 $\Lambda(T) \sim IG(\omega/\mu, \omega^2/\sigma^2)$, 其中 $IG(b_1, b_2)$ 的概率密度函数为 (b_1 为均值, $b_2 > 0$ 为形状参数)

$$f(u; b_1, b_2) = \sqrt{\frac{b_2}{2\pi u^3}} \exp\left[-\frac{b_2(u-b_1)^2}{2b_1^2 u}\right], u > 0 \quad (2.4)$$

进而推导产品的可靠度函数和可靠寿命为

$$R(t | \omega, \sigma, \mu) = \Phi\left(\frac{\omega - \mu\Lambda(t)}{\sigma\sqrt{\Lambda(t)}}\right) - \exp\left(\frac{2\mu\omega}{\sigma^2}\right) \Phi\left(-\frac{\omega + \mu\Lambda(t)}{\sigma\sqrt{\Lambda(t)}}\right) \quad (2.5)$$

$$t_r = \Lambda^{-1}\left[R^{-1}(\mu | \omega, \sigma)|_{R=r}\right] \quad (2.6)$$

式中, $^{-1}$ 表示函数取反; r 表示规定的可靠度值。

上述模型基于精确退化数据进行分析, 当退化数据为区间型 $[X, \bar{X}]$ 时, 模型参数 μ 也是区间型 $[\underline{\mu}, \bar{\mu}]$, 如何进行模型参数分析, 对于求解可靠度和可靠寿命具有重要影响。通过采用区间回归方法能够有效处理区间数据, 下面对该方法进行详细介绍。

2.2.2 区间回归分析

区间分析方法是回归分析方法的一种, 通过假设区间回归系数来获取自变量和因变量之间的关系, 常见的有区间输入-区间输出、精确输入-区间输出。考虑到工程实际中, 测量时间或加速应力为精确的, 本章采用精确输入-区间输出的线性回归分析方法进行建模, 得到模型参数 (即区间回归系数)。模型为

$$Z(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}^T \mathbf{Y} = A_0 + A_1 y_1 + \dots + A_p y_p \quad (2.7)$$

式中, $\mathbf{Y} = [1, y_1, \dots, y_p]^T$ 为输入向量, p 为模型输出参数种类数, $\mathbf{A} = [A_0, A_1, \dots, A_p]^T$ 为

区间型回归系数, $A_i = \langle a_i, c_i \rangle$, a_i 和 c_i 分别表示回归系数 A_i 的中心和半径值。根据区间运算法则, 式(2.7)可转换为

$$Z(\mathbf{Y}_j) = \langle a_0, c_0 \rangle + \langle a_1, c_1 \rangle y_{j1} + \dots + \langle a_p, c_p \rangle y_{jp} = \langle \mathbf{a}' \mathbf{y}_j, \mathbf{c}' | \mathbf{y}_j | \rangle \quad (2.8)$$

式中, $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_p]^T$, $\mathbf{c} = [c_0, \dots, c_p]^T$, $\mathbf{y}_j = [1, y_{j1}, \dots, y_{jp}]^T$ 。

区间分析方法主要分为两类: 基于可能性概念的可能回归分析(可能性模型, Possibility Model)和基于最小化误差的最小二乘方法(必要性模型, Necessity Model)^[32]。两类模型分别为

$$Z^*(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}^{*T} \mathbf{Y} = A_0^* + A_1^* y_1 + \dots + A_p^* y_p \quad (2.9)$$

$$Z_*(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}_*^T \mathbf{Y} = A_{*0} + A_{*1} y_1 + \dots + A_{*p} y_p \quad (2.10)$$

通常假设两类模型具有相同的中心值, 即两类模型的回归系数为 $A_i^* = \langle a_i, d_i \rangle$ 和 $A_{*i} = \langle a_i, c_i \rangle$, 则两类模型求解可分别转化为二次规划问题, 即

$$\begin{aligned} \underset{a, d}{\text{Min}} \quad & \mathbf{d}^T \left(\sum_{j=1}^n |\mathbf{y}_j| |\mathbf{y}_j|^T \right) \mathbf{d} + \xi \mathbf{a}^T \mathbf{a} \\ \text{subject} \quad & \mathbf{a}^T \mathbf{y}_j + \mathbf{d}^T |\mathbf{y}_j| \geq \bar{Z}(\mathbf{Y}_j) \\ \text{to} \quad & \mathbf{a}^T \mathbf{y}_j - \mathbf{d}^T |\mathbf{y}_j| \leq \underline{Z}(\mathbf{Y}_j) \\ & d_i \geq 0 \quad i = 0, 1, \dots, p \\ & j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.11)$$

和

$$\begin{aligned} \underset{a, c}{\text{Max}} \quad & \mathbf{c}^T \left(\sum_{j=1}^n |\mathbf{y}_j| |\mathbf{y}_j|^T \right) \mathbf{c} + \xi (\mathbf{c}^T \mathbf{c}) \\ \text{subject} \quad & \mathbf{a}^T \mathbf{y}_i + \mathbf{c}^T |\mathbf{y}_i| \leq \bar{Z}(\mathbf{Y}_j) \\ \text{to} \quad & \mathbf{a}^T \mathbf{y}_j - \mathbf{c}^T |\mathbf{y}_j| \geq \underline{Z}(\mathbf{Y}_j) \\ & c_i \geq 0 \quad i = 0, 1, \dots, p \\ & j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.12)$$

对于实际观测区间变量 $Z(\mathbf{Y})$ 满足条件

$$Z_*(\mathbf{Y}) \subseteq Z(\mathbf{Y}) \subseteq Z^*(\mathbf{Y}) \quad (2.13)$$

这里根据模型关系(2.13), 可将式(2.11)和(2.12)构造为一个通用二次规划模型。对可能性模型 A_i^* 的回归系数半径进行变换: $d_i \rightarrow c_i + d_i (d_i \geq 0)$, 代入最小化模型(2.11), 同时对模型(2.12)的目标函数取负, 从而将目标函数合为一个最小化函数, 即可获得通用二

次规划模型，用于两类模型参数的求解^[32]。

$$\begin{aligned}
& \underset{a,c,d}{\text{Min}} && \mathbf{d}^T \left(\sum_{j=1}^n |\mathbf{y}_j| |\mathbf{y}_j|^T \right) \mathbf{d} + \xi (\mathbf{a}^T \mathbf{a} + \mathbf{c}^T \mathbf{c}) \\
& && \mathbf{a}^T \mathbf{y}_j + \mathbf{c}^T |\mathbf{y}_j| + \mathbf{d}^T |\mathbf{y}_j| \geq \bar{Z}(\mathbf{Y}_j) \\
& && \mathbf{a}^T \mathbf{y}_j - \mathbf{c}^T |\mathbf{y}_j| - \mathbf{d}^T |\mathbf{y}_j| \leq \underline{Z}(\mathbf{Y}_j) \\
& \text{subject} && \mathbf{a}^T \mathbf{y}_i + \mathbf{c}^T |\mathbf{y}_i| \leq \bar{Z}(\mathbf{Y}_j) \\
& \text{to} && \mathbf{a}^T \mathbf{y}_j - \mathbf{c}^T |\mathbf{y}_j| \geq \underline{Z}(\mathbf{Y}_j) \\
& && c_i \geq 0 \quad d_i \geq 0 \quad i = 0, 1, \dots, p \\
& && j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.14}$$

上述二次规划模型能够处理区间型数据，对式(2.1)取期望可知 $E[X(t)] = \mu\Lambda(t)$ ，对于精确输入 $\Lambda(t)$ -区间输出 $[X, \bar{X}]$ ，采用区间回归方法，能够获取区间回归系数，即漂移系数 μ 。

2.3 区间型加速退化试验分析

2.3.1 基于区间分析方法的加速退化建模

考虑到测量、人为等因素，退化数据是非精确的，采用区间型描述比精确数据更为合适。而对于精确输入-区间输出型数据，采用两类模型进行建模分析，获取区间型结果。关于两类模型，可能性模型是对模型输入输出之间可能性的一种表征，其输出最大程度覆盖所有的实际观测区间。必要性模型是对模型输入输出之间集中程度的一种表征，其输出最大程度包含于实际观测区间，即满足模型关系式(2.13)。

在时间尺度上，即精确时间-区间退化数据，本论文采用可能性模型最大可能的获取漂移系数的区间值。而在应力尺度上，即精确应力-区间漂移系数，在漂移系数外推的过程中需要在所有可能结果中找到最大程度符合加速模型的结果，即中心趋势特性，而必要性模型能够表征此特性，为此本论文采用必要性模型进行外推。具体建模评估流程见图 4。

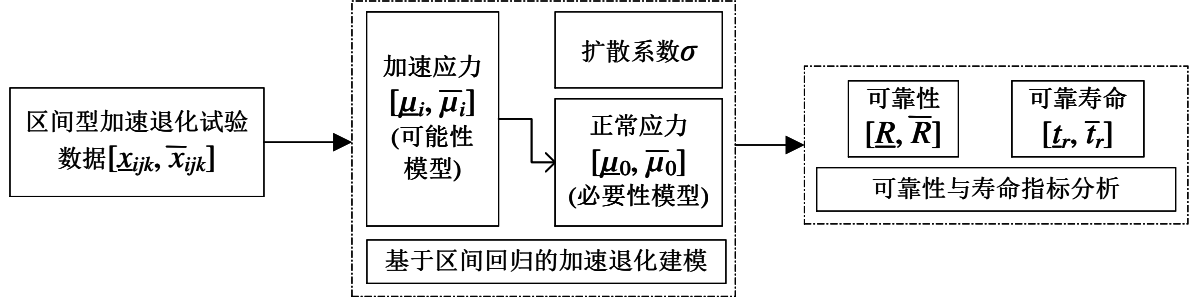


图 4 区间型加速退化试验分析流程图

这里以恒定应力加速退化试验为例，假设 $[x_{ijk}, \bar{x}_{ijk}]$ 表示第 i ($i=1,2,\dots,K$)个加速应力水平下第 j ($j=1,2,\dots,n_i$)个样品第 k ($k=1,2,\dots,m_j$)个监测点的退化试验数据区间，对应的监测时间为 t_{ijk} 。基于区间回归分析方法的加速退化建模主要分为两步：

1) 获取各加速应力条件下漂移系数 $[\underline{\mu}_{ij}, \bar{\mu}_{ij}]$ 和扩散系数 σ

本章基于维纳过程对退化过程建模，其期望退化路径服从一元线性过程，因此针对区间型加速退化数据 $(t_{ijk}, [x_{ijk}, \bar{x}_{ijk}])$ ，可采用式(2.7)进行区间运算 ($p=1$)。同时，为了更全面的获取漂移系数的所有可能取值，采用可能性模型(2.11)优化求解，得到的回归系数 A_1 的区间，即该应力条件下的漂移系数 $[\underline{\mu}_{ij}, \bar{\mu}_{ij}]$ 。

对于扩散系数 σ ，其表征退化过程的随机特性，通常刻画一系列随机因素对产品性能的影响，是与应力和时间无关的常量，为此假设其为精确值。由式(2.3)可得传统精确数据下的扩散系数 σ 为

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=2}^{m_j} (e_{ijk} - e_{ij(k-1)})^2}{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=2}^{m_j} \Delta t_{ijk}} \quad (2.15)$$

式中， e_{ijk} 表示此监测点的预测相对误差，即 $e_{ijk} = x_{ijk} - \mu_{ij} \Lambda(t_{ijk})$ 。当退化数据为区间型时，相对误差同时存在于预测上限和下限，为此取上下限误差的平方和根作为此监测点的预测误差，即

$$e_{ijk}^* = \sqrt{(\bar{x}_{ijk}^* - \bar{x}_{ijk})^2 + (x_{ijk}^* - \underline{x}_{ijk})^2} \quad (2.16)$$

将式(2.16)替换至式(2.15)得到扩散系数 σ 。

2) 外推正常应力条件下漂移系数 $[\underline{\mu}_0, \bar{\mu}_0]$

为了考核产品的可靠性和寿命指标，需要将加速应力条件下的性能参数外推至正常

应力条件下，即通过加速模型(2.2)来实现。在步骤1)中获得应力条件*i*下的漂移系数 $[\underline{\mu}_i, \bar{\mu}_i]$ ，表示该条件下漂移系数的所有可能结果，则 $[\underline{\mu}_i, \bar{\mu}_i]$ 为

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_i &= \text{Min} \left\{ \bigcup_{j=1}^{n_i} [\underline{\mu}_{ij}, \bar{\mu}_{ij}] \right\} \\ \bar{\mu}_i &= \text{Max} \left\{ \bigcup_{j=1}^{n_i} [\underline{\mu}_{ij}, \bar{\mu}_{ij}] \right\}\end{aligned}\quad (2.17)$$

根据 $(s_i, [\underline{\mu}_i, \bar{\mu}_i])$ ，同样采用式(2.7)进行区间运算，根据加速应力种类设定参数*p*。在外推的过程中，需要在所有可能结果中找到最大程度符合加速模型的结果，采用必要性模型进行外推。为了对比两类模型的区别，首先优化通用模型(2.14)，得到区间回归系数*a*、*c*和*d*，代入正常应力条件*s*₀，即可得到两类模型下的 $[\underline{\mu}_0, \bar{\mu}_0]$ 。

2.3.2 可靠性与寿命指标

对于精确退化数据的情况，式(2.5)和(2.6)分别给出了首穿时服从逆高斯分布的可靠度和寿命函数。第2.3.1节针对区间型非精确ADT数据，通过建模分析得到的是区间型漂移系数 $[\underline{\mu}_0, \bar{\mu}_0]$ 和扩散系数 σ 。

从而，由逆高斯分布性质可知，可靠度和寿命指标区间为

$$[\underline{R}, \bar{R}](t | \omega, \sigma, \mu_0 \in [\underline{\mu}_0, \bar{\mu}_0]) = [R(t | \omega, \sigma, \bar{\mu}_0), R(t | \omega, \sigma, \underline{\mu}_0)] \quad (2.18)$$

$$[\underline{t}_r, \bar{t}_r] = \left[\Lambda^{-1} \left[R^{-1}(\bar{\mu}_0 | \omega, \sigma) \Big|_{R=r} \right], \Lambda^{-1} \left[R^{-1}(\underline{\mu}_0 | \omega, \sigma) \Big|_{R=r} \right] \right] \quad (2.19)$$

上述建模分析方法能够处理区间型加速退化试验数据，基于式(2.18)和(2.19)分析区间型非精确数据所带来的认知不确定性对可靠性和寿命评估结果的影响，进而为消除加速试验中的认知不确定性，提高可靠度与寿命评估结果可信度提供依据。

2.4 案例分析

2.4.1 加速退化试验信息

为了验证本文方法的有效性，分析数据非精确性对可靠性和寿命评估结果的影响。选用文献[136]提供的恒定应力加速退化试验数据，试验为了测试某种金属合金的耐磨性，在不同加载条件下进行滑动测试，记录划痕宽度用于分析确定载荷的影响，具体试验信息见表 1，原始数据见图 5。

表 1 金属合金的加速磨损退化试验信息

应力编号	加速载荷/g	样品数	测量时间/hours
1	10	4	2,5,10,20,50,100,200,500
2	50	4	2,5,10,20,50,100,200,500
3	100	4	2,5,10,20,50,100,200,500

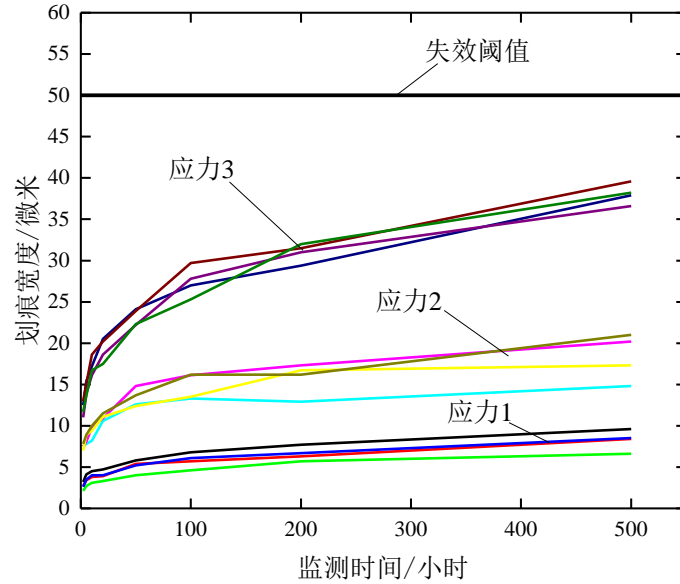


图 5 三种加载条件下的加速磨损退化试验数据

假设数据记录过程，由于人的认知等主观因素，如多名检测人员，使得记录数据是非精确的，为了刻画此类认知不确定性，在原始数据的基础上进行如下处理：

- 1) 随机从正态分布中抽取 Δ_i 满足： $\Delta_i \sim N(m, \zeta m)$ ， m 为均值， ζ 为收缩系数。简单起见，设 $\zeta=0.02$ 表示多人参与情况， $\zeta=0$ 表示单人参与情况。
- 2) 第 i 个原始测量值 $\pm \Delta_i$ 作为该测量点的实际记录值，即区间退化数据。

这里，可以看出 m 参数反映数据非精确程度， m 值越大表示不确定性程度越高，通过提高检测人员水平、设备精度等措施来加以降低或消除，因此本章取不同的 m 值来分析退化数据的测量不确定性对评估结果的影响。

已知失效阈值 ω 为50微米，假设其正常使用条件下的加载为5g，退化过程服从维纳过程，式(2.2)中加速模型 $\varphi(s)=W$ (W 为施加的加速应力载荷)， $\Lambda(t) = \ln t$ ，首先取 $m=0.5$ ，利用本章方法进行可靠性和寿命评估。

根据第2.3节区间型加速退化数据的建模方法，得出各加速载荷条件下的漂移系数 $[\underline{\mu}_{ij}, \bar{\mu}_j]$ 及扩散系数 $\sigma=0.6772$ 。根据加速模型式(2.2)将 $(W_i, [\underline{\mu}_i, \bar{\mu}_i])$ 代入通用模型式(2.14)，结果见图 6，外推正常载荷下的漂移系数(必要性模型)为 $[\underline{\mu}_0, \bar{\mu}_0] = [0.7844, 0.9386]$ 。最后

将所得参数结果代入式(2.18)和式(2.19)，得到的可靠度区间如图 7所示，可靠度为0.9的寿命为 $\exp[46.72, 55.19]$ 小时。

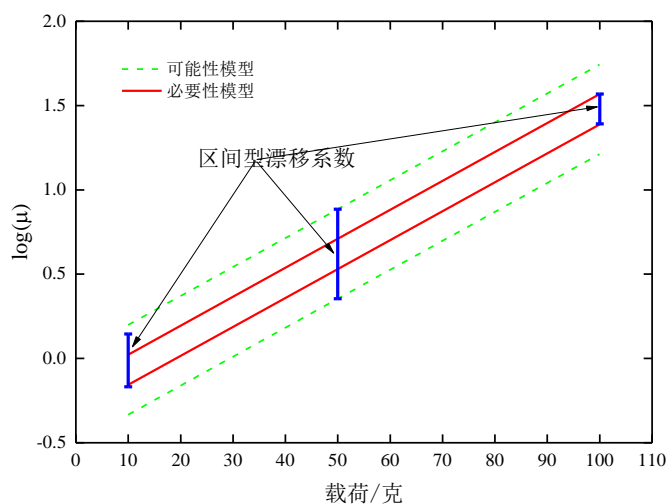


图 6 三种加载条件下的漂移系数

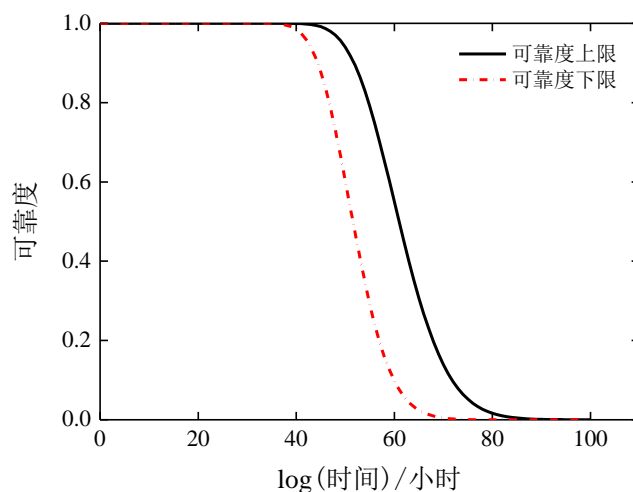


图 7 当 $m=0.5$ 时的区间可靠度曲线

2.4.2 数据非精确性对寿命与可靠度的影响分析

数据不确定性主要分为两类：认知不确定性和随机不确定性，其中随机不确定性来源于系统误差，无法避免和消除；然而认知不确定性来源于人的主观原因，是可以采取措施（如增大样本量来增强认知水平）来消除或转化为随机不确定性。

为了分析该类不确定性对产品可靠性和寿命结果的影响，设置 m 分别取0.01、0.03、0.05、0.07、0.1、0.3、0.5、0.7、1来分析对应的可靠度和寿命指标情况。这里，本章考虑两种工程实际情况：一是多人参与加速试验测试的情况（认知水平存在不同），二是单人参与测试的情况（认知水平单一）。为了模拟这两种情况，根据第2.4.1节方法，分别取

$\zeta=0.02$ 和0并代入各 m 值进行求解。通过两种情况的对比分析，了解人的参与所引起的认知不确定性对寿命评估结果的影响。图 8~图 10分别给出了两种情况的漂移系数 μ_0 、扩散系数 σ 和可靠寿命。

由图 8(a)可知，随着 m 值的降低，第1种情况下的漂移系数中心值从0.86增大至0.91左右，而第2种情况下稳定在0.887左右，表明该参数值受数据非精确性的影响，可能的解决途径是减少人员参与。从总的趋势上来看，图 8(b)中 μ_0 半径随 m 值降低而减小，意味着提高数据精确性能够在一定程度上降低 μ_0 的不确定性。

对于扩散系数 σ ，该参数刻画随机因素对产品性能的影响，从图 9可以看出该参数对数据非精确性较为敏感，但同时考虑到该参数与受试产品数目有关，因此当样品量一定时，降低数据非精确性有利于该参数的确定。

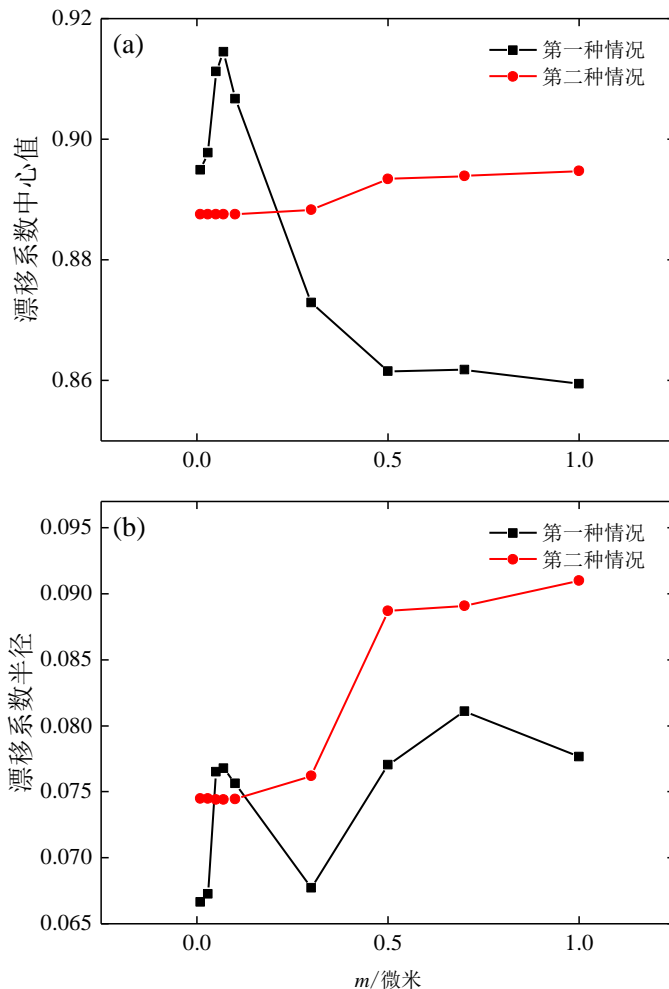


图 8 两种情况下不同 m 值对应的漂移系数中心值和半径

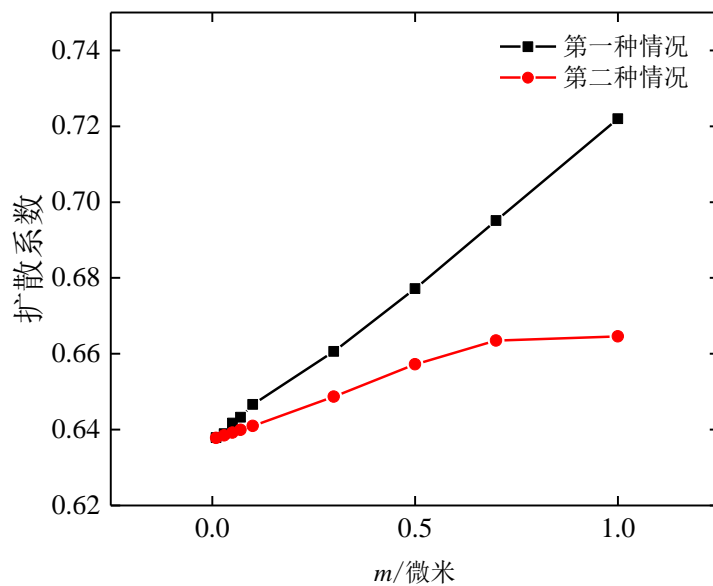


图 9 两种情况下不同 m 值对应的扩散系数

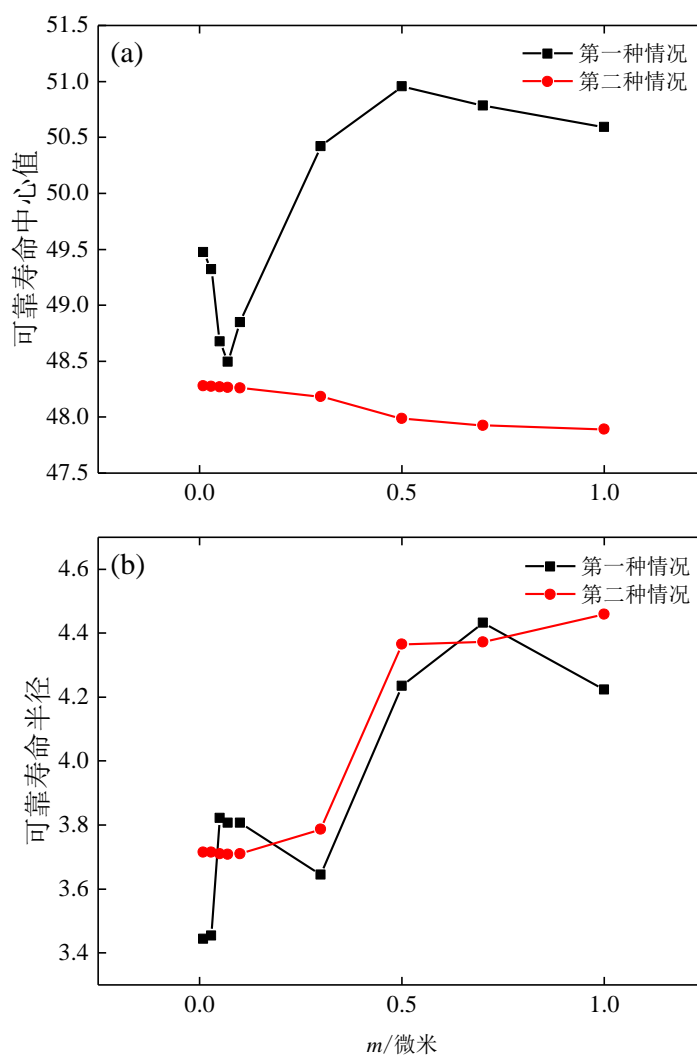


图 10 两种情况下不同 m 值对应的可靠度为 0.9 的可靠寿命中心值和半径

对产品而言，实施加速试验的目的是确定其可靠性和寿命指标，通过给定不同 m 值下的 μ_0 和 σ 值，代入式(2.5)和式(2.6)，结果如图 10 (a)和(b)所示，第1种情况下不同 m 值对应的可靠寿命结果存在较大差异，而第2种情况下结果较为平稳。而对于可靠寿命半径，两种情况下都随着 m 值降低而显著减少，因此为了保证寿命评估结果的合理性，需尽可能消除数据非精确性，如减少人员参与。

2.5 本章小结

本章考虑加速退化数据是非精确情况，采用区间回归分析方法给出了区间型加速退化试验数据的可靠性和寿命评估方法。主要结论有：

- 1) 退化数据测量由于人为因素和设备等原因，存在主观认知不确定性和系统随机不确定性，在实际加速试验中应尽量减少人员参与，尽可能地消除数据非精确性所带来的认知不确定性；
- 2) 数值案例表明：与寿命评估有关的模型参数，即漂移系数 μ_0 和扩散系数 σ 均受数据非精确性的影响，降低不确定性水平能够使得模型参数更为可信；
- 3) 加速试验的寿命评估结果受数据非精确性的影响，且随着认知不确定性的降低，评估结果的不确定性也随之降低。因此，在试验过程和结果处理中需考虑和消除此影响。

第三章 非直接观测 ADT 数据的模糊可靠性评估方法

本章针对非直接观测的ADT信息（如振动数据），基于特征提取与选择方法来获取产品退化特征数据，该过程中存在信息损失等引起的退化数据不确定性问题，本章提出一种机械加速试验的模糊可靠性评估方法。

3.1 问题描述

在许多工程对象中，如飞机、风机和汽车等，旋转机械产品得到了广泛应用并在其功能中扮演着重要角色。轴承和齿轮是典型的旋转机械产品，具有高可靠长寿命的属性^[137]。对于该类产品的加速试验，通常能够获取振动信号数据，而无法直接获得具有物理含义的退化指标。这与电子产品不同，如 LED 输出光功率^[138]或锂离子电池内阻^[77]等，尽管有一些统计模型能够用于振动信号^[139]，但仍不能作为一般通用方法来处理。因此，为了获取产品性能退化指标，需要借助于信号处理技术来进行特征提取与选择^[140]。

常用的有时域、频域、时频域和信息域分析方法^[141-143]。例如，Huang 等人^[144]从球轴承振动信号中提取出六个振动特征，并用于训练反向传播神经网络，最终给出一种性能退化指标用于剩余寿命预测。Ocak 等人^[145]选取分解树的节点能量作为轴承失效预测的特征量。但同时，振动信号受周围环境及机械失效机理的复杂性影响而表现为动态性和非平稳性，从而使得提取出单一特征无趋势性，不能直接作为退化指标用于后续寿命与可靠性评估。

为了解决此问题，一些学者认为机械产品从正常到失效经历一个逐步恶化的过程，基于当前状态和初始健康状态之间的距离来量化产品的性能退化。Liu等人^[146]提出一种基于相似性的方法，通过量化产品当前特征分布和基准特征分布的重叠度，给出一个置信值（Confidence Value, CV）指标用于健康评估。基于此思想，Liao和Lee^[143]研究了固定循环功能测试的机械退化评估，采用高斯混合模型（Gaussian Mixture Model, GMM）方法给出CV值，用于表征产品的退化状态。Wang等人^[147]提出一种集成特征选择方法，获取用于轴承健康评估的特征集，基于GMM方法给出一种健康指标用于寿命预测。

目前，机械产品健康评估的研究主要在特定的环境条件下进行，而对于经受多种使用条件的研究较少^[141, 148, 149]，在识别使用条件对系统或产品失效的影响以及如何改善产品可靠性水平方面还存在不足。与此同时，特征提取和健康评估中存在的不确定性也需要进行量化，这可能会影响使用者对于评估结果的信任程度。

为此，本章提出非直接观测ADT数据的模糊可靠性评估方法，基于模糊理论对机械产品退化指标中存在的认知不确定性进行量化，从而给出较为合理的寿命与可靠性评估结果。

3.2 基于机械加速试验的模糊可靠性评估

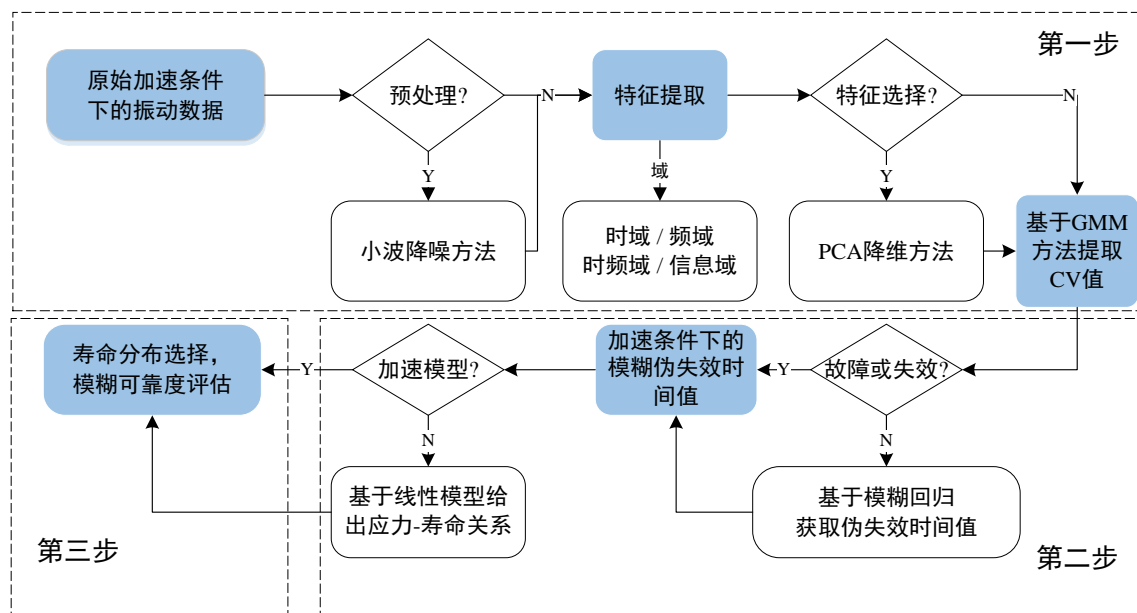


图 11 机械加速试验的模糊可靠性评估流程

图 11给出了机械加速试验的模糊可靠性评估流程，主要分为三个部分：退化指标获取、退化建模和模糊可靠性评估。

第一步是从原始振动信号中获取表征产品健康状态的退化指标。首先，根据需要采用小波分析方法对原始信号进行降噪处理，消除环境噪声的附加影响。然后，分别从四个域中获取产品的全部信息，包括时域、频域、时频域和信息域。考虑到特征集是高维数据不利于分析计算，采用主成分分析（Principal Component Analysis, PCA）方法基于主成分的累积贡献率来降维。最后，采用GMM方法单步计算当前特征分布和基准特征分布之间的距离，从而给出退化指标CV值。如果CV接近于1，则产品处于正常健康状态；反之，产品处于恶化状态。

第二步是对CV退化路径建模并获取各加速使用条件下的伪失效时间。考虑到特征提取和健康评估中存在的认知不确定性，本章基于模糊回归方法从模糊的角度对CV路径建模，结合失效阈值给出模糊失效时间。在开展模糊可靠性分析之前需要确定加速模型，从而将各加速使用条件下的失效时间外推至正常使用条件。这里，本章基于线性模型来辨识失效时间与使用条件之间的关系，同时采用回归系数表征各应力条件或其组合

对产品失效的贡献程度。

最后基于正常使用条件下的失效时间开展模糊可靠性评估，如可靠度、MTTF等指标，为维护决策提供支持。

本章余下部分将详细介绍机械加速试验的振动数据处理方法。

3.2.1 退化指标

对于经受缓慢恶化过程且原始振动信号无法直接使用的机械产品，需要借助于特征提取方法来寻找退化指标，从而开展可靠性评估工作。通常来说，一种特征并不足以反映产品的退化状态。比如，垂直方向加速度计信号的峭度因子适用于描述部分轴承缓慢退化过程，而对于其他轴承则不适用^[149]。因而，需要将多种特征进行集成，从而全面地认知产品的退化状态。本章从四个特征域提取特征集，采用GMM方法获取CV退化指标，即给出当前特征集（退化）和基准特征集（正常）之间的距离。

3.2.1.1 特征提取与主成分分析

特征提取方法能够从振动信号 $s(t)$ 中获取表征机械产品性能的参量，主要包括时域、频域、时频域和信息域^[140, 150]：

1) 时域

时域特征表征振动信号的瞬时变化情况，能够直接反映产品的健康状态，该特征通常采用统计分析方法来获得，如均值、方差、均方根值、峰值、峰值指标、偏度指标、峭度指标、波形指标、脉冲指标、裕度指标等。

2) 频域

频域特征表征产品状态变化的动态信息，该特征的获取首先要基于频谱分析方法（如快速傅里叶变换）将时域信号转化到频域，进而在全谱上获取产品状态的表征参量，如重心频率、均方频率和频率方差。

3) 时频域

时频域分析方法结合了时域和频域分析的优势，将信号能量分解到两个方向从而更好地捕捉故障特征并开展故障预测。其中，小波包分解（Wavelet Package Analysis, WPA）和Hilbert-Huang变换（HHT）是最常用的时频域分析方法。本章选取WPD的前八个节点能量（4层分解，选取daubechies小波为母小波函数）以及HHT全频域能量作为该域的特征量。

4) 信息熵

信息熵是信号不确定性的一种测度，信息熵越高表征信号的不确定性程度越高。基于此，选取幅值谱熵、HHT 边际谱熵和 HHT 边际能量谱熵用于特征分析。

假设试验中记录了 n 个信号，特征集 $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_p]'$ ，这里 $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}]$ 。为了消除不同特征单位影响，采用 $x_{i-} = (x_{ij} - \min(x_{i-})) / (\max(x_{i-}) - \min(x_{i-}))$ 将 \mathbf{X} 中各个特征归一化到 $[0, 1]$ ，这里， $j = 1, 2, \dots, n$ ， x_{i-} 和 \bar{x}_{i-} 分别表示特征集 \mathbf{X} 的第 i 行及其均值。

考虑到高维特征集会导致“维数灾”，进而降低运算效率，本章采用 PCA 方法进行降维处理^[151]。该方法将原始特征集转化为互不相交的主成分，并最小化重构误差，是一种线性降维方法。

假设 $p \times p$ 的协方差矩阵为 R_x ，其特征值分解为

$$\begin{aligned} R_x &= (X - \bar{X})(X - \bar{X})^T \\ \lambda v &= R_x v \end{aligned} \quad (3.1)$$

式中， v 是特征向量， λ 是对角矩阵，其特征值降序排列。定义从第 1 到 k 个特征值对应的累积贡献率为 $CP_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i / \sum_{i=1}^p \lambda_i$ 。在工程应用中， CP 值选在 $[0.8, 0.9]$ 之间是可以接受的，本章选为 0.8。那么，降维后的 $k \times n$ 维特征集 \mathbf{Y} 为

$$\mathbf{Y} = v_{1:k}^T \mathbf{X} \quad (3.2)$$

3.2.1.2 基于 GMM 方法的退化指标获取

根据最新的 k 维特征集，接下来是获取退化指标。对于轴承而言，其缓慢恶化可能是由于球磨损或者内在的杂质引起的，所提取出的特征能够反映该过程。具体来说，在初始的 m 个监测区间内，受试产品处于健康状态。随着时间推移，最新的 m 个应该处于部分退化状态。因此，采用 GMM 建模方法来度量两者的距离，即重叠度，进而获取产品的退化指标^[143, 152, 153]。

假设特征集 \mathbf{Y} 的 m 列 $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]$ 表示一个健康状态，其概率密度函数 y_q ($q = 1, 2, \dots, m$) 服从一个由 N 个高斯单元组成的混合分布，即

$$f(y_q) = \sum_{p=1}^N \omega_p \text{Norm}(y_q | \boldsymbol{\mu}_p, \boldsymbol{\Sigma}_p) \quad (3.3)$$

式中， ω_p 是第 p 个混合元的权重， $\text{Norm}(\boldsymbol{\mu}_p, \boldsymbol{\Sigma}_p)$ 为

$$Norm(y_q | \boldsymbol{\mu}_p, \boldsymbol{\Sigma}_p) = (2\pi)^{-k/2} |\boldsymbol{\Sigma}_p|^{-1/2} \exp \left[-1/2 (y_q - \boldsymbol{\mu}_p)' \boldsymbol{\Sigma}_p^{-1} (y_q - \boldsymbol{\mu}_p) \right] \quad (3.4)$$

基于期望最大化算法 (Expectation Maximization, EM) 来估计未知参数 $\omega_p, \mu_p, \Sigma_p$, 常用的判定指标有: 似然函数 $L(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \prod_{q=1}^m f(y_q)$ 的收敛或迭代次数达到最大值 i_{max} ^[143, 154]。

基于 EM 算法的 GMM 参数估计算法

- (i) $i \leftarrow 0$, 初始化所有高斯单元的未知参数 $\omega_{p(0)}, \mu_{p(0)}, \Sigma_{p(0)}$
 - (ii) 令 $i \leftarrow i + 1$
- E 步:** 输出样本 y_q 在第 p 个混合元的后验概率

$$\hat{p}(\omega_p | y_q, \mu_{p(i-1)}, \Sigma_{p(i-1)}) = \frac{Norm(y_q | \mu_{p(i-1)}, \Sigma_{p(i-1)}) \omega_{p(i-1)}}{\sum_{j=1}^N Norm(y_q | \mu_{j(i-1)}, \Sigma_{j(i-1)}) \omega_{j(i-1)}} \quad (3.5)$$

M 步: 更新 ω_p, μ_p 和 Σ_p

$$\begin{aligned} \omega_{p(i)} &= \frac{1}{m} \sum_{q=1}^m \hat{p}(\omega_p | y_q, \mu_{p(i-1)}, \Sigma_{p(i-1)}) \\ \mu_{p(i)} &= \frac{\sum_{q=1}^m \hat{p}(\omega_p | y_q, \mu_{p(i-1)}, \Sigma_{p(i-1)}) y_q}{\sum_{q=1}^m \hat{p}(\omega_p | y_q, \mu_{p(i-1)}, \Sigma_{p(i-1)})} \\ \Sigma_{p(i)} &= \frac{\sum_{q=1}^m \hat{p}(\omega_p | y_q, \mu_{p(i-1)}, \Sigma_{p(i-1)}) (y_q - \mu_{p(i-1)}) (y_q - \mu_{p(i-1)})'}{\sum_{q=1}^m \hat{p}(\omega_p | y_q, \mu_{p(i-1)}, \Sigma_{p(i-1)})} \end{aligned} \quad (3.6)$$

- (iii) 当 $i = i_{max}$ 或 $|(L_i - L_{(i-1)})/L_{(i-1)}| < \varepsilon$ 时结束循环

因此, 每 m 个区间 (即一个健康状态) 的 GMM 模型可通过上述算法获得, 则基准模型 f_0 (正常状态) 和最新的第 h 个模型 f_h 的距离可表示^[143, 155]

$$CV_h = \frac{\int f_0(y) f_h(y) dy}{\sqrt{\int (f_0(y))^2 dy} \sqrt{\int (f_h(y))^2 dy}} \quad (3.7)$$

如果第 h 个状态依旧正常, 那么 CV 值将接近于 1; 相反如果第 h 个状态已经严重恶化, 那么 CV 值将接近于 0, 此时需要提供维护方案来避免系统故障发生。因此, CV 值能够作

为表征机械产品健康状态的退化指标。

3.2.2 退化模型和加速模型

通过第3.2.1.2方法能够从振动信号中获得不同加速使用条件下的退化指标，而开展机械产品的可靠度和寿命评估还需要基于这些退化指标给出伪失效时间。考虑从原始振动数据中提取特征以及采用马氏距离（Mahalanobis Distance, M-D）计算CV时存在信息损失，而这些认知不确定性是不能忽视的，为此本章采用模糊回归方法对CV退化路径进行建模，类似的应用见[99, 100]。

本节首先介绍基本的模糊运算法则，然后采用模糊回归模型对退化路径进行建模并获得各加速使用条件下的模糊失效时间，最后介绍加速模型的辨识方法，进而确定失效时间和使用条件之间的关系，便于开展正常使用条件下的可靠性评估。

3.2.2.1 基本模糊运算

Zadeh[46]提出了模糊集理论，来解决由于非精确或者含糊不清引起的不确定性问题，通过采用隶属度函数来表示数据，常用的隶属度函数有三角、矩形和梯形函数。为不失一般性，本章选用三角隶属度函数来简化运算。令 $\tilde{X} = \text{tfn}(\bar{x}, l, r)$ 表示一个模糊数，如图12所示。这里， \bar{x} , l 和 r 分别表示中心值、左边界和右边界， $\mu_{\tilde{X}}(x) \in [0,1]$ 表示 x 在 \tilde{X} 中的隶属值，即

$$\mu_{\tilde{X}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \bar{x} - l \\ 1 + (x - \bar{x})/l & \bar{x} - l < x \leq \bar{x} \\ 1 - (x - \bar{x})/r & \bar{x} < x \leq \bar{x} + r \\ 0 & x > \bar{x} + r \end{cases} \quad (3.8)$$

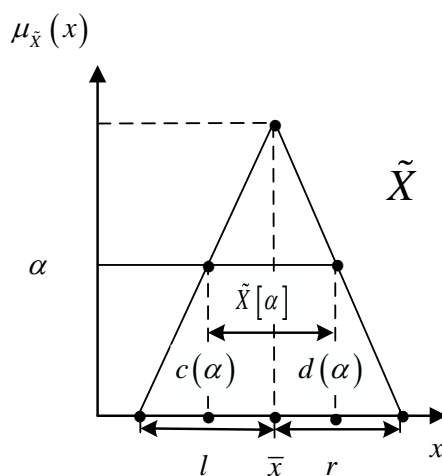


图 12 模糊数及其 α 截集

对于模糊数，通常基于 α 截集来进行运算，即在纵轴上采用隶属值 α 对模糊数进行分解，见图 12。这里 $0 \leq \alpha \leq 1$ ， \tilde{X} 的 α 截集可以定义为

$$\tilde{X}[\alpha] = \{x | \mu_{\tilde{X}}(x) \geq \alpha\} = [c(\alpha), d(\alpha)] \quad (3.9)$$

式中， $c(\alpha)$ 和 $d(\alpha)$ 分别是关于 α 的增函数和减函数，满足 $c(\alpha) \leq d(\alpha)$ ^[156]。当 $\alpha = 0$ 时， $[c(0), d(0)]$ 被称为模糊数 \tilde{X} 的基（The support of fuzzy number）。

假设两个三角模糊数 \tilde{A} 和 \tilde{B} 及其对应的 α 截集 $\tilde{A}[\alpha] = [c_1(\alpha), d_1(\alpha)]$ 和 $\tilde{B}[\alpha] = [c_2(\alpha), d_2(\alpha)]$ 。二者的运算法则可以借助于基本的区间运算，如加法、减法、乘法和除法可以分别表示为 $\tilde{C}[\alpha] = \tilde{A}[\alpha] + \tilde{B}[\alpha]$ ， $\tilde{A}[\alpha] - \tilde{B}[\alpha]$ ， $\tilde{A}[\alpha] \cdot \tilde{B}[\alpha]$ 和 $\tilde{A}[\alpha]/\tilde{B}[\alpha]$ ，注意在乘法运算中对于任意 α ，0都不属于 $\tilde{B}[\alpha]$ ^[100, 156]。假设函数 $h: [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ ， $\tilde{Z} = h(\tilde{X})$ 是一个模糊函数，则 \tilde{Z} 的隶属函数可以由Zadeh扩展法则给出

$$\mu_{\tilde{Z}}(z) = \sup_x \{ \mu_{\tilde{X}}(x) | h(x) = z, a \leq x \leq b \} \quad (3.10)$$

若函数 h 是连续的，那么 \tilde{Z} 的 α 截集 $\tilde{Z}[\alpha] = [z_1(\alpha), z_2(\alpha)]$ 分别是^[157]

$$\begin{aligned} z_1(\alpha) &= \min \{ h(x), x \in \tilde{X}[\alpha] \} \\ z_2(\alpha) &= \max \{ h(x), x \in \tilde{X}[\alpha] \} \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2.2.2 模糊回归方法及伪失效时间

对于非精确退化数据，模糊回归方法是一种很好的建模方法，其基于模糊理论能够表征认知不确定性的影响。通常来说，有两种方法开展建模分析：1)对每个退化数据设定隶属度函数，然后基于带模糊参数的回归方法对退化路径进行建模^[99, 158]；2)直接采用回归方法对退化路径进行建模，然后选择参数的 $(1-\alpha)100\%$ 置信区间作为其模糊估计量^[100]。以3.2.1节的CV值为例，其数据由于内在的不确定性是非精确，然而没有先验信息来对CV值附加隶属度函数，因而本章选择第二种建模方法。

一般来说，退化路径可分为三类：线性、凸、凹，因此线性、指数和幂律模型广泛应用于退化建模，基本的回归模型可表示为

$$y(t) = D(t; \theta) + \varepsilon, \quad D(t; \theta) = \begin{cases} a + bt & \text{线性} \\ a \cdot \exp(bt) & \text{指数} \\ a \cdot t^b & \text{幂律} \end{cases} \quad (3.12)$$

式中， $D(\cdot)$ 表示期望路径， $\theta = [a, b]$ 是待估常数， ε 是误差项，假设服从正态分布。因此，基于统计拟合指标选择式(3.12)最优的候选模型，如 R^2 和 R_{adj}^2 。同时，所选模型的未知参数可通过最小二乘方法来估计。

之后, 定义参数向量的 $(1-\alpha)100\%$ 置信区间 $\hat{\theta}$ 为参数的模糊估计量 $\tilde{\theta}$, 即^[100]

$$\left[\hat{\theta} / \exp \left[t_{(1-\alpha/2, n_{cv}-p)} se(\hat{\theta}) / \hat{\theta} \right], \hat{\theta} \cdot \exp \left[t_{(1-\alpha/2, n_{cv}-p)} se(\hat{\theta}) / \hat{\theta} \right] \right] \quad (3.13)$$

式中, n_{cv} 是 CV 值的数目, p 是未知参数的数目 (本章为 2)。为了简单起见, 选择对称三角隶属度函数表示模糊参数 $\tilde{\theta}$, 即式(3.8)中 $l = r$ 。对于任意 $\alpha \in [0, 1]$, 定义 $\tilde{\theta}$ 的 α 截集为 $\tilde{\theta}[\alpha]$ 。

因此, 模糊回归模型为

$$\tilde{y}(t) = D(t; \tilde{\theta}) + \tilde{\varepsilon} \quad (3.14)$$

当失效阈值 ω 已知时, 对应于每个使用条件下的模糊失效时间可以通过式(3.14)及 α 截集下的区间运算来给出, 即 $\tilde{T}[\alpha] = [(t_1|\omega)(\alpha), (t_2|\omega)(\alpha)]$ 。

3.2.2.3 加速模型

为了开展正常使用条件下的可靠性和寿命分析, 必须通过加速模型来辨识失效时间与使用条件之间的关系。一般来说, 加速模型可以由物理机理分析或先验经验获得^[86]。对于机械产品而言, 此类先验信息较为缺乏, 如不同载荷和转速条件下的轴承加速模型。因此, 采用如下对数线性模型, 类似应用可见^[98]。

$$\ln(T+1) = \lambda_0 + \lambda_1 \ln S + \lambda_2 \ln L + \lambda_3 \ln S \cdot \ln L + \lambda_4 \ln S^2 + \lambda_5 \ln L^2 + \varepsilon \quad (3.15)$$

式中, λ_k 是回归系数, $k = 1, 2, \dots, 5$; S 和 L 分别表示轴承转速和载荷; T 为失效时间。式(3.15)的最优参数可通过 Matlab 中最小二乘函数 *fitlm* 给出。类似地, 通过在所有 $\alpha \in [0, 1]$ 下辨识模糊失效时间 $\tilde{T}[\alpha]$ 与使用条件 (载荷和转速) 之间的关系, 得到模糊加速模型。

在每个 α 截集下, 分别将正常和第 j 个加速使用条件代入最优参数下的函数, 获得对应的平均模糊失效时间, 即 $\tilde{T}_0[\alpha]$ 和 $\tilde{T}_j[\alpha]$ 。从而, 模糊加速因子 (Acceleration Factor, AF) 可表示为

$$\tilde{A}_j[\alpha] = \tilde{T}_0[\alpha] / \tilde{T}_j[\alpha] \quad (3.16)$$

根据式(3.16), 可将模糊失效时间 $\tilde{T}[\alpha]$ 外推至正常使用条件, 即 $\tilde{T}_0[\alpha]$ 。

除了开展可靠度与寿命评估, 加速试验的另一个优势是提供应力或者其组合对于机械产品失效的敏感性信息, 有助于提高可靠性或者指导产品设计改进。以下算法通过分析模糊回归系数 $\tilde{\lambda}_k[\alpha]$ 来实现该目的:

敏感应力分析

设定 $i_{max} = M$ ，表示隶属值在 $[0, 1]$ 的区间数目

(i) $i \leftarrow 0$ ，输出每个 $\alpha \leftarrow i/M$ 截集下模糊回归系数

将模糊失效时间 $\tilde{T}_j[\alpha]$ 和第 j 个使用条件 S_j 和 L_j 代入式(3.15)

$$model \leftarrow fitlm(\tilde{T}_j[\alpha], 'T \sim 1 + S + L + S * L + S^2 + L^2')$$

$$\lambda_k[\alpha] \leftarrow model.Coefficients.Estimate(k)$$

$$\tilde{T}_0[\alpha] \leftarrow predict(model, [S_0, L_0])$$

$$\tilde{T}_j[\alpha] \leftarrow predict(model, [S_j, L_j])$$

根据式(3.16)输出模糊加速因子

(ii) 当 $i \leftarrow i_{max}$ 时结束

(iii) 根据所有模糊回归系数 $\tilde{\lambda}_k[\alpha]$ 构造隶属度函数，分析相互关系并输出敏感应力

3.2.3 寿命分布选取和模糊可靠性评估

针对正常应力条件下的模糊失效时间，本节给出一种寿命分布选择方法，基于所选分布开展模糊可靠性评估，给出可靠度、MTTF 等指标评估结果。

3.2.3.1 失效寿命分布

对于模糊失效时间，A-D 检验（Anderson–Darling test）^[159]能够检验各备选寿命分布对 α 截集下失效时间的拟合程度，如正态、指数、极值、对数正态或威布尔分布。以下给出一种寿命分布评分方法：

(i) 令 $i_{max} = M$ ， $h_j = 0$ 。这里， h_j 表示第 j 个分布在所有 α 截集下的总得分，默认的显著性水平为 5%

(ii) $i \leftarrow 0$ ，输出 α 截集为 $\alpha \leftarrow i/M$

计算 A-D 检验拒绝原假设的得分，即失效时间 $\tilde{T}_0[\alpha]$ 是否来自于第 j 个分布

$$h \leftarrow adtest(\tilde{T}_0[\alpha], 'j^{th} distribution')$$

如果不拒绝，则 $h = 0$ ；否则 $h = 1$ 。计算得分 $h_j = h_j + h$

(iii) 当 $i \leftarrow i_{max}$ 时结束

(iv) 降序排列 h_j ，选取最小（或第一个）为最适用的寿命分布

对于一些特殊案例，如轴承，研究表明其寿命分布服从威布尔分布^[160]，其可直接用

于模糊可靠性分析。

$$f(t|\theta) = (\beta/\eta) \cdot (t/\eta)^{\beta-1} \exp\left[-(t/\eta)^\beta\right] \quad (3.17)$$

式中， η 为尺度参数， β 为形状参数。在传统的可靠性分析中， $\beta > 1$ 意味着产品经历着耗损期。而在模糊状态下，通过对每个截距下的模糊失效时间 $\tilde{T}_0[\alpha]$ 进行寿命分布拟合可获得模糊参数 $\tilde{\eta}[\alpha]$ 和 $\tilde{\beta}[\alpha]$ ，同样可以反映产品的健康状态。

3.2.3.2 模糊可靠性评估

假设所选寿命分布为 $f(\cdot)$ ，定义产品在时间区间 $[t_1, t_2]$ 内的模糊可靠度为（以威布尔分布为例）

$$\tilde{R}(t_1, t_2)[\alpha] = 1 - \int_{t_1}^{t_2} f(t|\tilde{\theta}[\alpha]) dt = 1 + \exp\left[-(t_2/\tilde{\eta}[\alpha])^{\tilde{\beta}[\alpha]}\right] - \exp\left[-(t_1/\tilde{\eta}[\alpha])^{\tilde{\beta}[\alpha]}\right] \quad (3.18)$$

其他可靠性指标同样可以通过将模糊参数代入传统的解析结果来获取，如平均故障前时间或失效率函数等。

$$\tilde{M}[\alpha] = \int t \cdot f(t|\tilde{\theta}[\alpha]) dt = \tilde{\eta}[\alpha] \Gamma(1 + 1/\tilde{\beta}[\alpha]) \quad (3.19)$$

若选取其他寿命分布，如对数正态分布，则重写式(3.18)和(3.19)即可。

3.3 案例分析

3.3.1 实验平台

本节采用 IEEE PHM 2012 data challenge 数据来验证所提方法的有效性，图 13 为轴承实验平台 PRONOSTA，由三个部分组成：旋转、退化生成（通过在轴承上施加一个径向力）和测量部分^[149]，采用的嵌入式加速度计采样频率是 25.6 kHz。该平台能够实现轴承加速退化试验，同时监测振动和温度信号用于故障诊断和剩余寿命预测。

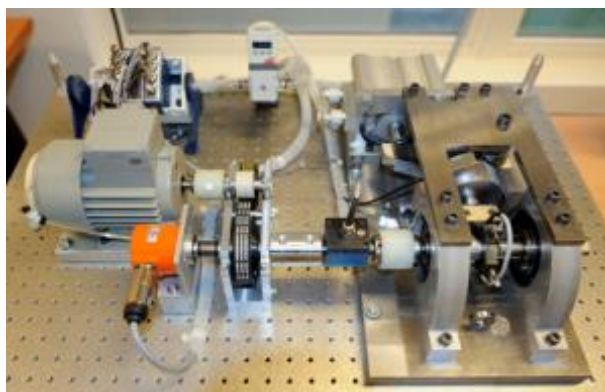


图 13 轴承实验平台^[149]

表 2 轴承加速试验的数据集

数据集	加速使用条件		
	条件 1	条件 2	条件 3
训练集	No. 1_1, No. 1_2	No. 2_1, No. 2_2	No. 3_1, No. 3_2
测试集	No. 1_3 到 No. 1_7	No. 2_3 到 No. 2_7	No. 3_3

轴承试验对 17 个样本开展三个使用条件的加速试验，其中： $S = 1800 \text{ rpm} \& L = 4000N$ （条件 1）、 $S = 1650 \text{ rpm} \& L = 4200N$ （条件 2）和 $S = 1500 \text{ rpm} \& L = 5000N$ （条件 3）。当加速度超过 20g 时，认为轴承故障。表 2 给出了受试轴承的数据集，包括（用于算法或模型的）训练集和测试集。鉴于轴承特征的非线性特性，很难准确地开展剩余寿命预测^[149, 161]。因此，本章所提框架将用于非直接观测加速退化数据的轴承可靠性分析，由于轴承可靠性指标是针对样本总体而非个体，因此寿命显著大于或者小于其他轴承被剔除，包括编号 1_2、1_4、2_1 和 2_7。此外，本章选择垂直方向的振动信号开展分析，文献[162]验证该信号能更好地反映产品健康状态。

3.3.2 数据分析

3.3.2.1 退化建模和模糊失效时间

根据 3.2.1 节的流程，首先基于 Stein 无偏风险准则和软阈值，采用 4 层小波方法对原始信号进行降噪处理^[163]；然后，提取四个域内总共 $p = 25$ 个特征，采用 PCA 方法进行降维处理；最后，采用 3.2.1.2 节的 GMM 方法得到退化指标 CV。这里，在选择表征一个状态的特征数目方面需要特别注意：本章在三个加速使用条件下采用不同的 m 组合，并将结果与训练集中已经失效的轴承信号（其加速度已超过 20g）进行对比，最终在三个条件下分别选取 $m = 1100$ 、300 和 250 表征一个健康状态，同时新的失效阈值定义为 0.2，即 $\omega = 0.2$ 。CV 结果如图 14 所示。

根据式(3.12)中的三个退化模型对 CV 路径进行建模，拟合结果如表 3 所示。可以看出：线性模型对轴承 2_3、2_5 和 2_6 拟合较差，对其他拟合较好，而图 14 显示退化过程总体上呈非线性趋势；对于另外两个模型，指数模型具有更高的 R^2 和 R^2_{adj} 值，因此本章选取指数模型开展轴承加速退化分析。

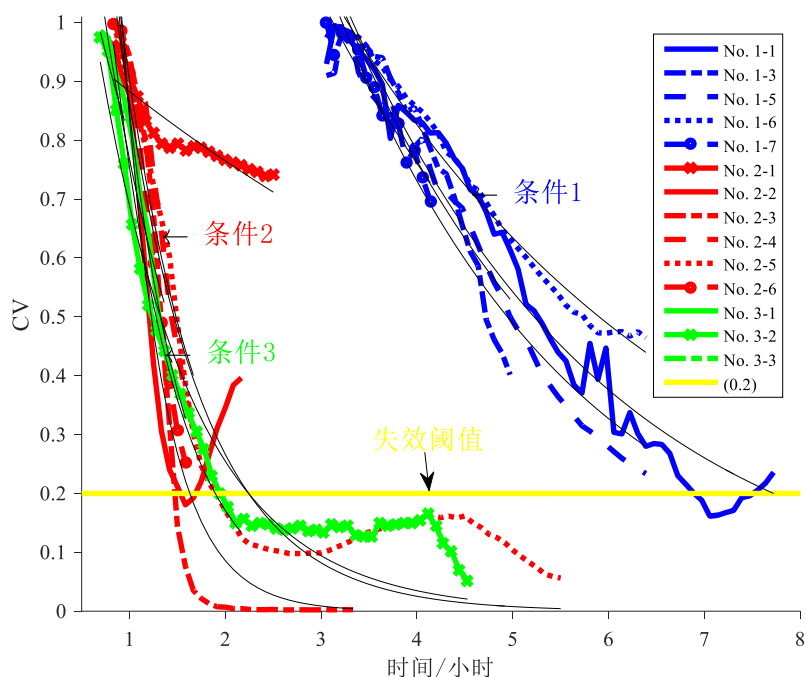


图 14 三种加速水平下的轴承退化过程及其拟合路径

表 3 退化模型拟合度对比结果

轴承编号	线性模型		指数模型		幂律模型	
	$R^2(\%)$	$R_{adj}^2(\%)$	$R^2(\%)$	$R_{adj}^2(\%)$	$R^2(\%)$	$R_{adj}^2(\%)$
1_1	96.2	96.1	95.4	95.3	90.6	90.4
1_3	92.9	92.6	87.2	86.6	83.0	82.2
1_5	98.3	98.3	95.2	95.1	90.9	90.7
1_6	98.2	98.2	98.5	98.4	96.2	96.1
1_7	94.8	94.4	93.5	93.0	92.1	91.4
2_2	96.1	95.6	93.8	93.0	89.9	88.7
2_3	61.3	60.0	91.8	91.5	86.5	86.0
2_4	96.8	96.4	90.9	89.9	85.3	83.7
2_5	48.2	47.3	86.7	86.5	90.8	90.6
2_6	98.6	98.4	94.1	93.4	89.7	88.4
3_1	96.9	96.4	92.6	91.5	87.2	85.4
3_2	62.0	61.1	91.8	91.6	96.9	96.9
3_3	97.2	95.8	96.8	95.2	95.6	93.3

表 4 给出了所选指数退化模型的统计分析结果，这里 A-D 检验用来验证误差项的正态假设。因此，尽管轴承 1_3、2_3、2_5 和 3_2 具有较好的 R^2 和 R_{adj}^2 结果（拟合程度较好），但其退化路径不满足正态假设。由图 14 可知，轴承 1_3 经历了突然恶化，所以

其寿命要显著小于其他在使用条件 1 下的轴承，因而轴承 1_3 被剔除。对于轴承 2_3、2_5 和 3_2，其 CV 值在 2 小时左右已经低于失效阈值 0.2，考虑到退化路径的尾部表明产品状态已经偏离正常状态，因此对于这三个轴承，分别忽略从 1.5、2 和 2.111 小时的 CV 值。对于轴承 2_2，其表现在 1.5833 小时变好，然而 CV 值已经低于失效阈值，故忽略从 1.5833 小时的 CV 值。上述四个轴承最新分析结果见表 4 中带括号项，如[2_3]。

根据 3.2.2.2 节方法构造指数退化模型的模糊参数，未知参数的 95%置信区间见表 4 右侧。进而，选择对称三角隶属度函数来表征未知参数 $\tilde{a}[\alpha]$ 和 $\tilde{b}[\alpha]$ ，由式(3.14)可得模糊失效时间，即 $\tilde{T}[\alpha] = [(t_1|C)(\alpha), (t_2|C)(\alpha)]$ ，结果见表 5 左侧。

3.3.2.2 加速模型和敏感应力分析

当各加速使用条件下的模糊失效时间已知时，可根据式(3.15)和(3.16)计算得到模糊加速因子（图 15）及模糊回归系数（图 16），同时将失效时间外推至正常使用条件。假设正常使用条件是转速 3000(rpm)和载荷 1200(N)，外推结果见表 5 右侧。

表 4 指数退化模型的参数估计量

轴承编号	a		b		AD (误差)		模糊估计量			
	E	SE	E	SE	p	stat	a		b	
1_1	3.389	0.189	-0.367	0.013	0.070	0.68	3.031	3.788	-0.393	-0.342
1_3	3.461	0.433	-0.377	0.033	0.011	0.98	2.670	4.486	-0.452	-0.315
1_5	3.646	0.244	-0.402	0.016	0.051	0.74	3.185	4.175	-0.436	-0.370
1_6	2.376	0.057	-0.264	0.006	0.189	0.51	2.264	2.494	-0.276	-0.253
1_7	2.648	0.225	-0.312	0.024	0.423	0.35	2.200	3.187	-0.369	-0.264
2_2	3.314	0.922	-1.483	0.243	0.598	0.29	1.832	5.997	-2.102	-1.046
[2_2]	6.421	1.521	-2.143	0.232	0.494	0.32	3.719	11.09	-2.752	-1.669
2_3	8.164	1.833	-2.278	0.217	0.003	1.20	5.157	12.92	-2.767	-1.876
[2_3]	3.625	1.109	-1.668	0.337	0.457	0.33	1.759	7.471	-2.691	-1.035
2_4	3.046	0.483	-1.217	0.142	0.685	0.26	2.128	4.360	-1.584	-0.935
2_5	2.796	0.311	-1.176	0.086	8e-04	1.46	2.237	3.495	-1.363	-1.015
[2_5]	2.753	0.307	-1.319	0.109	0.062	0.68	2.163	3.505	-1.576	-1.104
2_6	4.309	0.742	-1.629	0.162	0.874	0.20	2.897	6.410	-2.049	-1.294
3_1	2.200	0.251	-1.054	0.120	0.256	0.43	1.679	2.882	-1.378	-0.806
3_2	1.862	0.134	-0.995	0.057	0.010	1.01	1.611	2.152	-1.117	-0.886
[3_2]	2.436	0.073	-1.258	0.028	0.558	0.31	2.286	2.595	-1.319	-1.200
3_3	1.555	0.108	-0.659	0.086	0.152	0.43	1.153	2.098	-1.152	-0.377

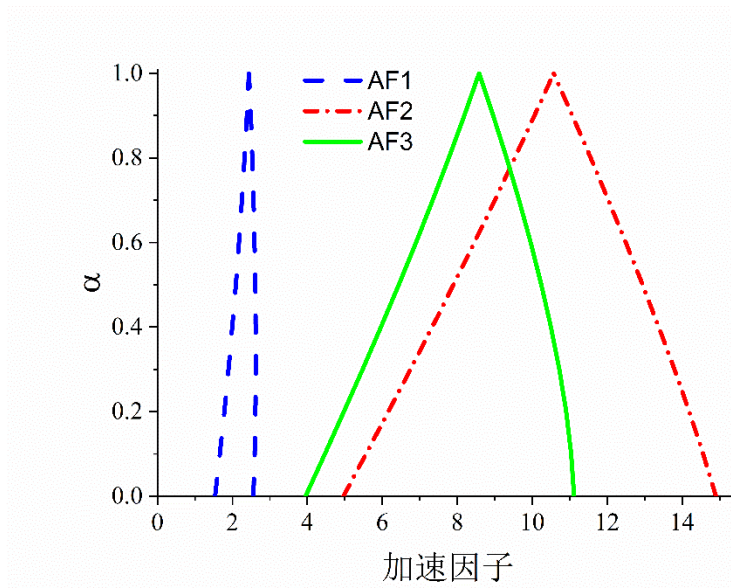


图 15 三种加速使用条件下的模糊加速因子

表 5 加速和正常条件下的模糊失效时间

轴承编号	模糊失效时间		使用条件		正常条件下的模糊失效时间 (3000rpm, 1200N)	
	T ₁ (h)	T ₂ (h)	转速(rpm)	载荷(N)	T ₁ (h)	T ₂ (h)
1_1	6.9177	8.6064	1800	4000	10.6271	22.0470
1_5	6.3450	8.2060			9.7474	21.0214
1_6	8.8065	9.9668			13.5288	25.5319
1_7	6.5015	10.496			9.9878	26.8877
2_2	1.0621	2.4053	1650	4200	5.2697	35.8368
2_3	0.8079	3.4998			4.0082	52.1441
2_4	1.4923	3.2946			7.4040	49.0869
2_5	1.5105	2.5948			7.4940	38.6610
2_6	1.3044	2.6794			6.4715	39.9207
3_1	1.5441	3.3117	1500	5000	6.0995	36.8122
3_2	1.8473	2.1364			7.2975	23.7476
3_3	1.5210	6.2316			6.0083	69.2690

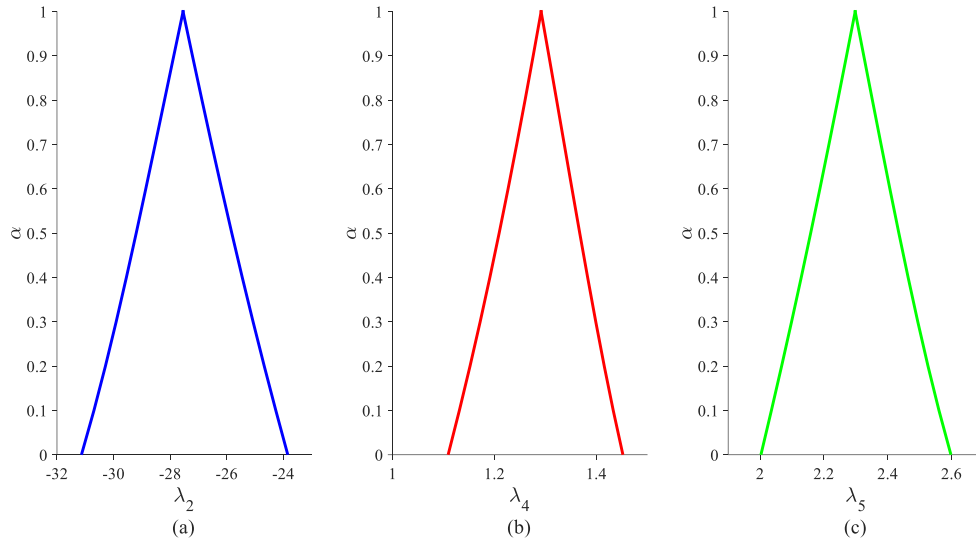


图 16 加速模型中的模糊回归系数

由图 15 可知，三个加速使用条件下的模糊加速因子的基分别为 $[1.53, 2.56]$ 、 $[4.96, 14.90]$ 和 $[3.95, 11.12]$ ，而峰值分别为 2.44、10.57 和 8.58。直观来说，对于任意 $\alpha \in [0, 1]$ 条件 2 和 3 的加速因子值都比条件 1 大，因此条件 2 和 3 比 1 要严酷。同时，当隶属度 $\alpha > 0.8$ 时，条件 2 比 3 要严酷；否则，二者不能够区分开。此外，由 3.2.2.3 节可知，加速模型的模糊回归系数能够用于分析转速和载荷对轴承寿命的敏感性。由图 16 结果显示： λ_0 、 λ_1 和 λ_3 在任意 $\alpha \in [0, 1]$ 都为 0，意味着单一转速应力以及转速和载荷的组合应力对轴承失效没有贡献；而 λ_2 、 λ_4 和 λ_5 对应的单一载荷应力以及转速、载荷的自相关是轴承的敏感应力。该结果能够帮助理解每个应力及其组合对轴承失效的贡献，从而帮助产品改进设计或者使用条件来提高轴承寿命。

3.3.2.3 轴承寿命分布选择和模糊可靠度分析

在已知模糊失效时间的情况下，选取适当的寿命分布对应可靠性分析是非常重要的。采用 3.2.3.1 的方法输出每个寿命分布在模糊失效时间 $\tilde{T}_0[\alpha]$ 两侧的得分情况，这里将隶属值分为 10 个区间，即 $M=10$ ，最高得分 $h_{max} = 2M + 1 = 21$ 。图 17 显示正态分布、对数正态分布和威布尔分布适用于描述轴承寿命数据，而指数分布完全不适用，极值分布表现较好且仅得一分。尽管研究显示轴承失效寿命服从威布尔分布^[160]，正态分布和对数正态分布同样可以应用于此案例，原因可能来自于小样本（12 个轴承失效数据）引起的寿命分布具有近似的形状。因此对于其他产品来说，若没有此类先验信息，需要特别注意寿命分布的选择。对于轴承而言，威布尔分布适用于输出模糊可靠度及 MTTF 指标。

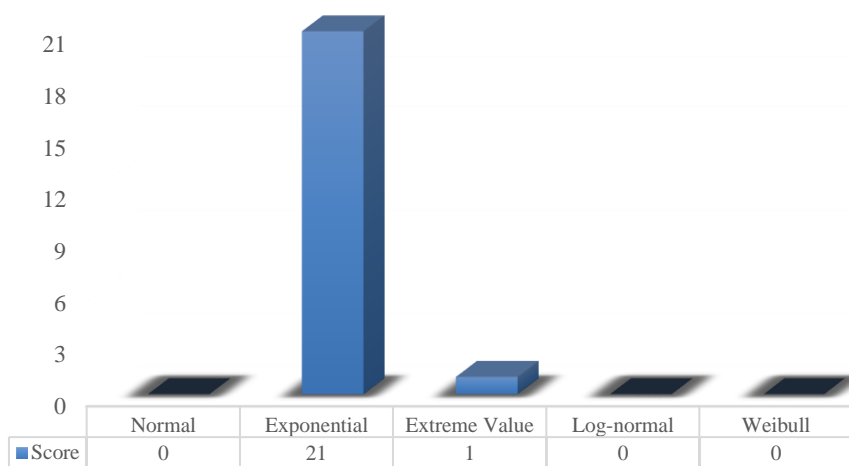


图 17 每个寿命分布对应轴承失效时间的得分情况

图 18 给出了每个 α 截集下的威布尔分布参数。对于任意 $\alpha \in [0,1]$, $\tilde{\beta}[\alpha]$ 都大于 1, 表明轴承经历耗损阶段。对于参数结果采用不同的隶属度, $\tilde{\beta}[\alpha]$ 的模糊值在 [2.80, 3.25] 区间, 并达到最大值 9.30, 因而对于轴承恶化的严重性具有显著不同的认识。然而在传统的可靠性分析中, 只能给出精确值而无法提供相应的信息。

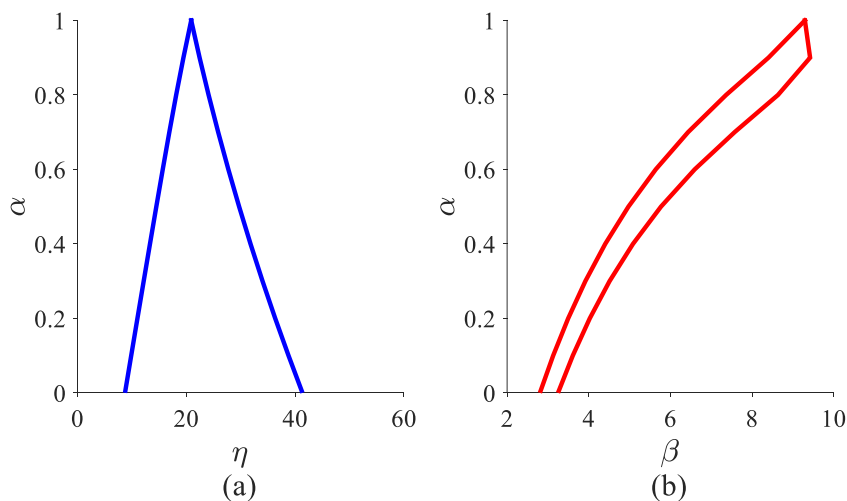


图 18 威布尔寿命分布的模糊参数

在竞赛详情中^[149], 多数轴承的寿命从 1 到 7 小时, 因而分析轴承在正常使用条件的下一小时内可靠度具有重要意义。根据式(3.18)计算轴承在 [7, 8] 小时内的模糊可靠度为 [0.8573, 0.9969], 峰值为 0.9999, 如图 19(a)所示, 结果验证了轴承在正常使用条件下具有较高可能性是安全可靠的。

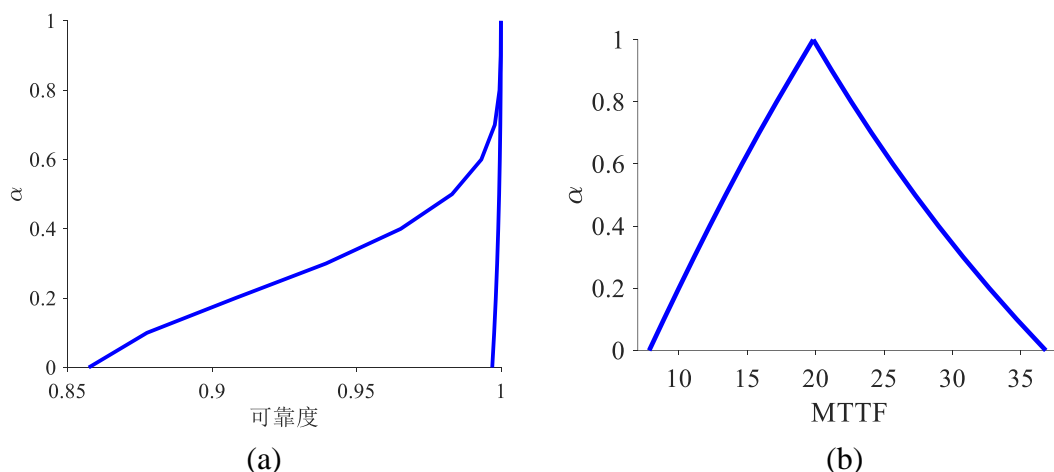


图 19 (a)轴承在[7,8]小时的模糊可靠度和(b)轴承的模糊 MTTF (小时)

对于使用者而言，更多地关注维修时间来做相应的维护决策，避免故障的发生并降低损失。根据式(3.19)计算轴承的模糊 MTTF 从 7.83 到 36.82 小时，峰值为 19.83 小时，如图 19(b)所示。与传统精确值对比可知，通过模糊 MTTF 能够直观地了解维修时间带来的决策风险。例如，如果传统值位于模糊 MTTF 的左侧，则维护策略偏于保守，反之较为激进。

3.3.3 验证与讨论

对于本章所提框架，可以根据实际失效时间数据来从两个方面验证其有效性：一是由回归方法得到的模糊失效时间与实际失效时间（见表 6）之间的对比，验证所提取的退化指标 CV 能够用于寿命预测；二是可靠度和 MTTF 评估结果与实际值给出的结果之间的对比，验证所提方法能够量化可靠度评估结果存在的风险。

实验采用的 17 个轴承全部运行到失效，详细失效时间数据列于表 6 左侧，而原始数据见 <http://www.femto-st.fr/ieec-PHM2012-data-challenge>。其中，12 个轴承用于可靠性分析和模糊失效时间计算，见表 5。通过对比发现，5 个轴承的失效时间在模糊结果的区间内，包括轴承 1_1、1_5、2_2、2_4 和 2.6；4 个轴承稍微过估计，包括轴承 1_6、1_7、3_1 和 3_3；余下 3 个轴承欠估计。因此，所提框架通过 GMM 方法获取的退化指标 CV 能够较好地应用于寿命预测。

在开展可靠性分析之前，需要根据式(3.15)确定加速模型，结果为

$$\ln(T+1) = -10.772 \cdot \ln L + 0.5713 \cdot \ln S^2 + 0.8591 \cdot \ln L^2$$

因而，敏感应力为单一载荷应力以及速度和载荷的自相关应力，该结果与 3.3.2.2 节的结果相一致。此外，三个加速使用条件的加速因子分别为 4.71、8.31 和 9.70。由图 15

可知，模糊结果很好地表征条件 2 和 3，而欠估计了应力 1。考虑到内在认知不确定性存在复杂的交互关系，该分析结果是可以接受的。表 6 右侧列出了外推至正常使用条件下的失效时间数据，A-D 检验表明威布尔分布是合适的寿命分布。

表 6 所有轴承在加速和正常使用条件下的实际失效时间

轴承编号	失效时间 (加速条件) T (h)	使用条件		失效时间 (3000rpm, 1200N) T (h)
		转速 (rpm)	载荷 (N)	
1_1	7.7833	1800	4000	36.6260
1_2	2.4167			11.3721
1_3	6.5944			31.0315
1_4	3.2553			15.3184
1_5	6.8389			32.1817
1_6	6.7969			31.9844
1_7	6.2725			29.5165
2_1	2.5278	1650	4200	21.0158
2_2	2.2111			18.3831
2_3	5.4278			45.1263
2_4	2.0833			17.3207
2_5	6.4167			53.3479
2_6	1.9444			16.1660
2_7	0.6361			5.2886
3_1	1.4278	1500	5000	13.8529
3_2	4.5444			44.0921
3_3	1.2028			11.6699

进一步对比可靠度和 MTTF 评估结果，威布尔分布的尺度和形状参数分别为 28.93 和 2.04，代入式(3.18)可得轴承在[7, 8]小时内的可靠度为 0.9837，显然模糊结果很好地表征该值，见图 19(a)。与此同时，所提方法能够告知产品可靠度在最坏的情况下还要大于 0.8573。类似地，MTTF 结果是 25.63 小时，也能被很好地表征，见图 19(b)。

从以上分析可知，所提框架可以给出可信的轴承可靠度和 MTTF 评估结果，并考虑了评估过程中存在的认知不确定性，量化非直接观测 ADT 数据评估的风险，能够用于其他机械产品加速数据的寿命预测与可靠度评估。

此外，在应用该框架进行分析时，需要特别注意原始振动数据的噪声剔除，这可能来源于实际使用环境中存在的噪声污染，能够显著影响寿命与可靠度评估结果。因此，针对特定的机械产品需要注意降噪方法的选择，如图 11 中的小波方法等。

3.4 本章小结

本章针对机械产品非直接观测 ADT 数据，研究给出了模糊可靠度评估流程，主要分为三个部分：退化指标获取、退化建模和模糊可靠度评估，通过案例验证了该框架能够输出可信的可靠度和 MTTF 评估结果，用于维护决策方案的制定。

本章所采用的 GMM 方法通过一个混合高斯分布来表征机械产品的一个状态，从而从原始振动信号的特征推断出产品的健康状态，适用于动态和非平稳信号。基于线性模型辨识使用条件与失效时间之间的关系，轴承案例验证轴承失效的敏感应力为单一载荷应力以及速度和载荷的自相关应力。通过与真实失效数据对比分析，所提方法能够很好地表征产品实际可靠度和 MTTF 值，量化接受评估结果带来的潜在风险。

第四章 基于不确定过程的 ADT 评估方法

在实际工程中受限于样本费用和试验资源，在研发后期仅能投入少量的样本开展加速退化试验。小样本会导致认知产品总体信息的缺乏，进而引起可靠性与寿命评估存在认知不确定性问题。本章基于不确定理论，结合专家经验提出一种不确定加速退化建模方法，从而给出组件级产品确信可靠性评估结果。

4.1 问题描述

国内外在研究 ADT 建模评估方法方面，通常基于概率理论的退化路径模型或者随机过程模型，开展正常使用条件下的寿命与可靠性评估。然而，这些方法需要大样本假设，即试验样本量足够多。在实际工程中，受试产品可能较为昂贵，使得在研发期间仅能投入少量的样本用于加速退化试验。因此，ADT 仅能获取有限的产品信息，从而导致寿命与可靠性评估知识的匮乏。若根据少量样本 ADT 获得的信息分布在样本总体均值附近，那么评估结果较为准确；反之，若该信息分布在样本总体尾部附近，那么评估结果则会显著趋于保守或激进，因此小样本 ADT 数据建模时应当考虑此类认知不确定性问题。

为了表征和降低小样本引起的认知不确定性问题，工程上可采用专家经验进行不确定性量化，借助专家知识或者经验来给出关于某些物理量或者评估结果的信度水平，通过贝叶斯理论的主观概率来加以刻画^[164]。例如，Guan 等人^[165]等提出一种基于维纳退化模型的恒定应力 ADT 客观贝叶斯方法。当信息缺乏以至于无法构造先验分布时，一些研究者采用区间理论^[166]或者模糊理论^[100]来分析退化过程数据，文献^[167]详细综述了该类非精确概率评估方法。

然而，Liu^[168]指出采用概率或者模糊理论对专家信度进行建模可能会得到与事实不符的结论。因此，刘宝碇在 2007 年提出了不确定理论，用于对小样本甚至无样本条件下专家信度的建模^[59]。该理论已成为对人的不确定性建模的数学分支^[60]，并成功应用于不确定风险分析^[61]和可靠性分析^[62, 68]等领域。

考虑到退化过程的动态现象，刘宝碇提出一类不确定过程（Uncertain process，又称 Liu Process，即刘氏过程）可用于描述产品的劣化过程，该过程是一个随时间变化的不确定变量序列^[169]。随后，刘宝碇给出极值定理，从而为不确定独立增量过程的首穿时分布获取提供依据^[170]。Liu^[60]和 Chen^[171]研究指出，平稳增量过程的期望和方差分别正

比于时间和时间的平方。Liu[172]同时给出描述不确定过程的不确定分布，并证明了不确定分布的充要条件及不确定过程的逆不确定分布形式。此外，一些研究学者从不肯定差分方程的角度来研究刘氏过程^[169, 173]，并给出了不确定差分方程的存在性和唯一性定理^[174]。Chen 和 Ralescu[175]讨论了刘氏过程的一些数学特性及不确定积分。

从目前国内外研究情况可以看出，基于概率理论的认知不确定性研究较为成熟，但对样本量需求较大。然而结合实际工程场景，通常样本量较少，需要借助专家经验来量化认知不确定性，而如何基于不确定理论研究专家信度对 ADT 建模及寿命与可靠性评估结果的影响，还缺乏相关的研究。

因此，本章将针对小样本情况下加速退化试验数据，基于不确定过程开展加速退化建模研究。首先，采用不确定过程描述小样本状态下的退化路径；然后通过专家对退化数据或者路径打分的方式，来量化小样本 ADT 数据中存在的认知不确定性；基于最小二乘法提出一种不确定统计方法，来估计不确定加速退化模型参数，给出确信可靠度指标评估结果；最后通过电连接器的应力松弛数据来验证所提方法的有效性。

4.2 不确定理论基础

2007 年刘宝碇教授建立一套公理化数学工具，用于解决人的不确定性量化问题，即信度建模的不确定性^[59]。本节介绍有关不确定理论及不确定测度 \mathcal{M} 的基本性质。

定义 Γ 为非空集合， \mathcal{L} 是 Γ 上的 σ -代数。 (Γ, \mathcal{L}) 表示一个可测空间， \mathcal{L} 中的每个元素 Λ 都是可测集。从而，在 \mathcal{L} 上定义不确定性测度 \mathcal{M} ，满足如下公理^[59]：

公理 1: (规范性) 对于全集 Γ ， $\mathcal{M}\{\Gamma\} = 1$ 。

公理 2: (对偶性) 对于任意事件 Λ ， $\mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Lambda^c\} = 1$ 。

公理 3: (次可加性) 对于任意可数事件序列 $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ ，有

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\} \quad (4.1)$$

公理 4: (乘积测度^[173]) 定义 $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ 为一个不确定空间， $k=1, 2, \dots$ ，乘积测度 \mathcal{M} 是一个不确定测度，满足

$$\mathcal{M}\left\{\prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_k\right\} = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} \quad (4.2)$$

式中, Λ_k 是从 \mathcal{L}_k 中任意选取的事件, $k=1,2,\dots$ 。

定义 1^[59]: 不确定变量 ξ 是一个从不确定空间 $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ 到实数集的可测函数, 从而对于实数的任意布尔集 B , 有

$$\{\xi \in B\} = \{\gamma \in \Gamma \mid \xi(\gamma) \in B\} \quad (4.3)$$

定义 2^[59]: 对于任意实数 x , 定义不确定变量 ξ 的不确定分布 Φ 为

$$\Phi(x) = \mathcal{M}\{\xi \leq x\} \quad (4.4)$$

对于规则不确定分布 $\Phi(x)$, 当且仅当对于任意 $\alpha \in [0,1]$, 有 $\mathcal{M}\{\xi \leq \Phi^{-1}(\alpha)\} = \alpha$, 则逆函数 $\Phi^{-1}(\alpha)$ 表示 ξ 的逆不确定分布。

定理 1^[60]: 定义 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 为独立不确定变量, 并分别具有规则不确定分布 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ 。若 $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 是关于 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ 的严格增函数且关于 $\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \dots, \xi_n$ 的严格减函数, 那么

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

具有如下逆不确定分布

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha))$$

定义 3^[169]: 定义 $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ 为一个不确定空间, T 为一个有序集 (如时间)。一个不确定过程是从 $T \times (\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ 到实数集的函数 $X_t(\gamma)$, 从而 $\{X_t \in B\}$ 是每个时刻 t 实数任意布尔集 B 的事件。

定义 4^[169]: 定义 X_t 为一个不确定过程, 那么对于每个 $\gamma \in \Gamma$, 函数 $X_t(\gamma)$ 被称为 X_t 的一个样本轨迹。

定义 5^[172]: 若对于每个时刻 t , 不确定变量 X_t 有不确定分布 $\Phi_t(x)$, 那么不确定过程 X_t 具有不确定分布 $\Phi_t(x)$ 。

定义 6^[169]: 若 $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ 为独立不确定变量, 其中 t_1, t_2, \dots, t_k 是满足 $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ 的任意时刻, 那么不确定过程 X_t 具有独立增量。

定义 7^[173]: 标准刘氏过程 C_t 满足以下性质:

- 1) $C_0=0$ 且几乎所有样本路径是 Lipschitz 连续;
- 2) C_t 具有平稳且独立增量;
- 3) 任意增量 $C_{s+r} - C_s$ 是一个正态不确定变量, 其均值为 0 且方差为 t^2 。

4.3 不确定加速退化建模

4.3.1 基于不确定过程的退化模型及加速模型

本章在不确定理论框架下研究小样本的 ADT 建模评估方法，具有下列假设：

- 1) 产品的性能退化过程总体趋势具有单调性，即退化过程不可逆；
- 2) 加速试验中产品退化的机理保持一致；
- 3) 在同一加速应力下，性能退化参数的监测时刻相同；
- 4) 假设产品的性能退化过程采用如下不确定差分方程来表示^[169]

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dC_t \quad (4.5)$$

式中， f 和 g 表示两个函数， C_t 表示具有平稳独立增量的标准刘氏过程，并满足正态不确定性分布 $C_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ ^[173]。

令 $f(t, X_t) = e$ 和 $g(t, X_t) = \sigma$ ，式(4.5)具有零初值的解为算术刘氏过程 (Arithmetic Liu Process)，即

$$X_t = et + \sigma C_t \quad (4.6)$$

式中， e 和 σ 分别表示偏移和扩散系数。从而， X_t 服从均值为 et 且方差为 $\sigma^2 t^2$ 的不确定正态分布。进一步研究非线性的退化过程，定义 $\tau = t^\beta$ 为时间的单调增函数。进而，算术刘氏过程 X_t 在每一时刻 t 都是一个正态不确定变量，满足

$$\Phi_t(x) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e\tau - x)}{\sqrt{3}\sigma\tau}\right) \right)^{-1} \quad (4.7)$$

考虑到 ADT 中退化过程与加速应力有关，假设加速应力 s'_i 与退化率 e_i 满足^[186]

$$e_i = \exp(\alpha_0 + \alpha_1 s'_i) \quad (4.8)$$

式中， α_0 和 α_1 表示常数， s_i 是第 i 个正则化后的应力，来避免参数不一致的问题。

$$s_i = \begin{cases} \frac{1/s'_0 - 1/s'_i}{1/s'_0 - 1/s'_H} & \text{阿伦尼乌斯模型} \\ \frac{\ln s'_i - \ln s'_0}{\ln s'_H - \ln s'_0} & \text{幂模型} \\ \frac{s'_i - s'_0}{s'_H - s'_0} & \text{指数模型} \end{cases} \quad (4.9)$$

式中， s'_i 为第 i 个实际应力水平， s'_0 和 s'_H 分别为正常和最高应力水平。易知， $s_0 = 0$ 。

4.3.2 首穿时不确定分布及确信可靠度

为了定义产品失效,需给出不确定过程 X_τ 首次穿越失效阈值 ω 的时间 t_ω (首穿时)所服从的不确定分布^[170],即首穿时分布

$$\Upsilon(z) = \mathcal{M}\{t_\omega \leq z\} = \mathcal{M}\left\{\sup_{0 \leq t \leq z} X_\tau \geq \omega\right\} \quad (4.10)$$

式中, $\mathcal{M}\{\cdot\}$ 表示不确定测度。

考虑到 X_τ 是独立增量过程,由极值定理可知式(4.10)可表示为^[170]

$$\Upsilon(z) = 1 - \inf_{0 \leq t \leq z} \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e\tau - \omega)}{\sqrt{3}\sigma\tau}\right)\right)^{-1} \quad (4.11)$$

由式(4.6)可知, τ 是关于时间 t 的单调递增函数, $\tau = t^\beta$, 从而式(4.11)可表示为

$$\Upsilon(z) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(\omega - ez^\beta)}{\sqrt{3}\sigma z^\beta}\right)\right)^{-1} \quad (4.12)$$

在不确定理论框架下,Zeng 等人[62]定义了一类新的可靠性指标,即确信可靠度 R_B ,来表示产品在 t 时刻正常工作的不确定测度。从而,根据式(4.12)可推导出该指标为

$$R_B(t) = 1 - \mathcal{M}\{t_\omega \leq t\} = 1 - \Upsilon(t) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(et^\beta - \omega)}{\sqrt{3}\sigma t^\beta}\right)\right)^{-1} \quad (4.13)$$

同时,定义确信可靠寿命 $BL(\alpha)$ 表示确信可靠度 $R_B(t)$ 低于某一信度 $\alpha \in [0,1]$ 时所对应的寿命下确界值,即

$$BL(\alpha) = \inf_{0 \leq t \leq z} R_B(z) \leq \alpha \quad (4.14)$$

由不确定测度的性质可知, R_B 和 $BL(\alpha)$ 具有如下性质:

- R_B 是基于不确定理论从专家信度的角度给出小样本状态下的一种评价结果,而不是基于概率理论从特定置信度的角度给出大样本状态下的评价结果;
- 根据最大不确定性定理^[60], $BL(0.5)$ 被认为是具有最大不确定性的寿命值。

4.3.3 不确定统计

本章仅给出恒定应力场景下的 ADT 参数评估方法,未来研究可能研究步进应力或序进应力场景下的参数及可靠性评估方法。定义 x_{ijk} 为第 i 个加速应力水平下第 j 个样本第 k 个性能退化值, t_{ijk} 为对应的检测时间, $i = 1, 2, \dots, K$; $j = 1, 2, \dots, n_i$; $k = 1, 2, \dots, m_{ij}$ 。其

中， K 为加速应力水平数目， n_i 为第 i 个应力水平下受试样本个数， m_{ij} 为第 i 个应力水平下第 j 个样本的检测次数。

通过试验获得产品 ADT 试验数据，如何在小样本状态下结合专家信度和 ADT 数据来估计式(4.6)和(4.8)中的未知参数，是开展确信可靠度评估的前提条件。然而，不确定理论中有关不确定过程的参数评估方法还有待解决。文献[176]依赖于专家实验数据，基于最小二乘法来估计不确定分布参数，该方法为不确定过程的参数估计提供了技术思路，即最小化专家实验数据与不确定分布之间距离的平方。

在小样本状态下，ADT 试验获取的退化数据无法完全代表产品的总体信息，从而引起对产品可靠性与寿命评估的认知不确定性问题。为此，本章分别从退化数据和退化路径两个方面设计两种专家信度评分法，具体的评分细则如下：

(1) 平均秩次法

由式(4.7)可知，第 i 个应力下第 k 个监测点的不确定退化变量 $\mathbf{x}_{ik} = [x_{i1k}, x_{i2k}, \dots, x_{ijk}, \dots]$ 服从不确定正态分布。定义 N_{ik} 是 \mathbf{x}_{ik} 中元素个数（上界为 n_i ）。

首先对不确定退化变量 \mathbf{x}_{ik} 进行从小到大排序，然后记录专家对各元素的累积信度 $\alpha_{ijk} \in [0,1]$ 。这里，借鉴经验函数的方法，可采用修正方程表征专家对各元素的累积信度，如分配等间距信度的平均秩次法， $\alpha_{ijk} = (j-0.3)/(N_{ik} + 0.4)$ ， $j=1,2,\dots, N_{ik}$ 。

当各加速应力下仅有一个样本时，即 $n_i = N_{ik} = 1$ ，那么 $\alpha_{ijk} = 0.5$ 满足最大不确定性定理。

(2) 退化路径评分法

专家的评分范围是 1-10，评分越高说明对退化轨迹所能表征产品总体信息的信任程度越高。专家评分表如表 7 所示。

表 7 第 i 个加速应力条件下的专家评分法表格

退化轨迹 \ 专家评分	专家 1	专家 2	...	专家 l	总得分
1	r_{i11}	r_{i12}	...	r_{i1l}	S_{i1}
2	r_{i21}	r_{i22}	...	r_{i2l}	S_{i2}
...
n_i	r_{in_i1}	r_{in_i2}	...	$r_{in_i l}$	S_{in_i}

其中， r_{ijl} 表示第 l 位专家对第 i 个应力下第 j 个样本的退化路径评分。

从而，第 i 个应力下第 j 个样本退化路径的总得分 S_{ij} 为

$$S_{ij} = \sum_{d=1}^l r_{ijd} \tag{4.15}$$

然后，根据总得分从小到大对退化轨迹进行排序，依次可得其专家累积信度 α_{ij}

$$\alpha_{ij} = \frac{\sum_{h=1}^j S_{ih}}{\sum_{h=1}^{n_i} S_{ih}} \quad (4.16)$$

此时，第 i 个应力下第 j 个样本的所有性能退化退化值 x_{ijk} 对应的专家信度 α_{ijk} 都为 α_{ij} ，即 $\alpha_{ijk}=\alpha_{ij}$ 。

基于最小二乘法，在各加速应力下对所有样本的性能退化值 x_{ijk} ，最小化专家累积信度 α_{ijk} 和退化路径值 x_{ijk} 在不确定正态分布(4.7)中所对应的实际信度 $\Phi(x_{ijk})$ 之差的平方和，得到目标函数 Q 为

$$Q = \min_{\theta} \sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^{m_{ij}} \sum_{j=1}^{N_{ik}} (\Phi(x_{ijk}) - \alpha_{ijk})^2 \quad (4.17)$$

根据 Matlab 程序的 `fminsearch` 函数，易得到未知参数集 $\theta = \{\alpha_0, \alpha_1, \sigma, \beta\}$ 的估计值。

4.4 案例分析

本节采用电连接器的应力松弛 ADT 数据验证所提方法的有效性，并基于敏感性分析讨论确信可靠度评估结果对样本量的敏感程度。

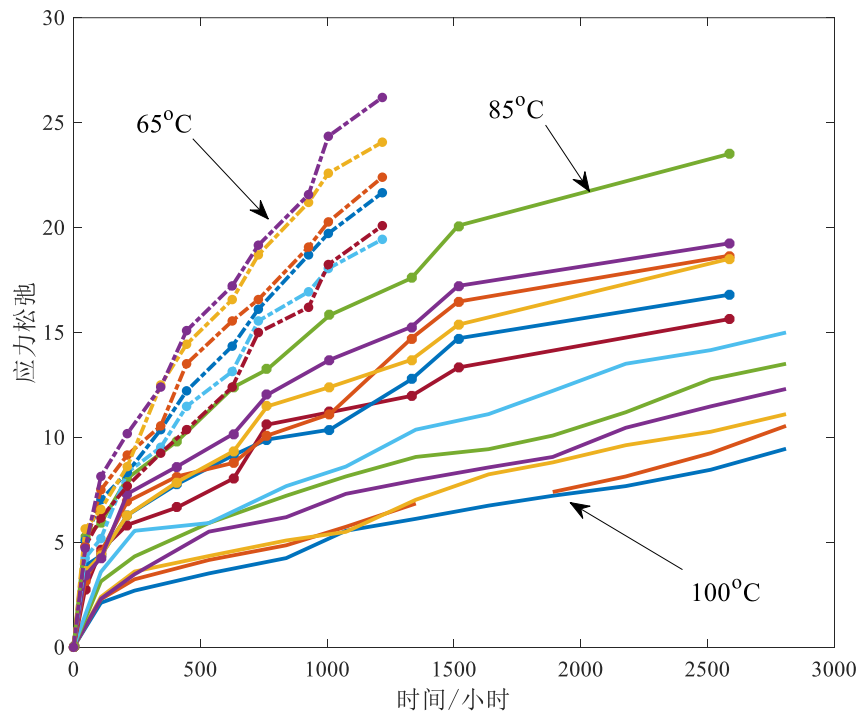


图 20 应力松弛恒定应力加速退化试验数据

4.4.1 应力松弛 ADT 数据集

某型电连接器的恒定应力 ADT 信息如表 8 所示，原始数据见图 20，详见文献[177]。

由表 8 可知,各加速应力下的试验样本量仅为 6 个,从而由样本推断总体时存在信息的缺乏,为此基于不确定理论并结合专家信度开展确信可靠度建模与评估,能够为小样本下认知产品可靠性水平提供新的思路。

表 8 电连接器应力松弛的恒定应力加速退化试验信息

类别	值
加速应力水平(温度/°C)	65, 85, 100
正常应力水平(温度/°C)	40
各加速应力下的样本数目	6, 6, 6

4.4.2 基于算术刘氏过程的确信可靠度评估

首先,选取退化模型及加速模型形式。由图 20 可知,产品的退化过程呈现非线性趋势,因而采用 $\tau = t^\beta$ 的时间变换形式^[103]。考虑到试验加速应力是温度,选取阿伦尼乌斯模型作为式(4.8)的加速模型^[86]。

其次,记录专家信度 α 。

(1) 方法一:平均秩次法

分别对第 i 个应力下第 k 个监测点的不确定退化变量 $\mathbf{x}_{ik} = [x_{i1k}, x_{i2k}, \dots, x_{ijk}, \dots]$ 进行从小到大排序,然后根据平均秩次法分别分配专家累计信度。

如当 $N_{ik} = 5$ 时, α_{ijk} 分别为[0.1296, 0.3148, 0.5, 0.6852, 0.8704];

当 N_{ik} 取最大为 6 时, α_{ijk} 分别为[0.1094, 0.2656, 0.4219, 0.5781, 0.7344, 0.8906]。

(2) 方法二:退化路径评分法

邀请三个专家进行打分,此案例简化起见,假设各应力下专家的评分相同,如表 9 所示。

表 9 各加速应力条件下的专家评分结果

退化轨迹 \ 专家评分	专家 1	专家 2	专家 3	总得分
1	7	9	8	24
2	5	4	2	11
3	6	7	9	22
4	8	10	8	26
5	3	5	2	10
6	4	7	9	20

根据总得分对退化轨迹排序,并计算得到专家累计信度如表 10 所示。

表 10 各退化路径对应的专家累计信度

退化轨迹 \ 专家评分	总得分	专家累计信度 α_{ij}
5	10	0.0885
2	11	0.1858
6	20	0.3628
3	22	0.5575
1	24	0.7699
4	26	1

最后, 根据 4.3.3 节的参数估计方法, 以平均秩次法的结果为例, 基于最小二乘法可得不确定加速退化模型参数的估计值, 见表 11。

表 11 基于算术刘氏过程的参数估计结果

参数	α_0	α_1	σ	β	ϱ
估计值	-2.0251	1.8626	0.1195	0.4496	2.8342

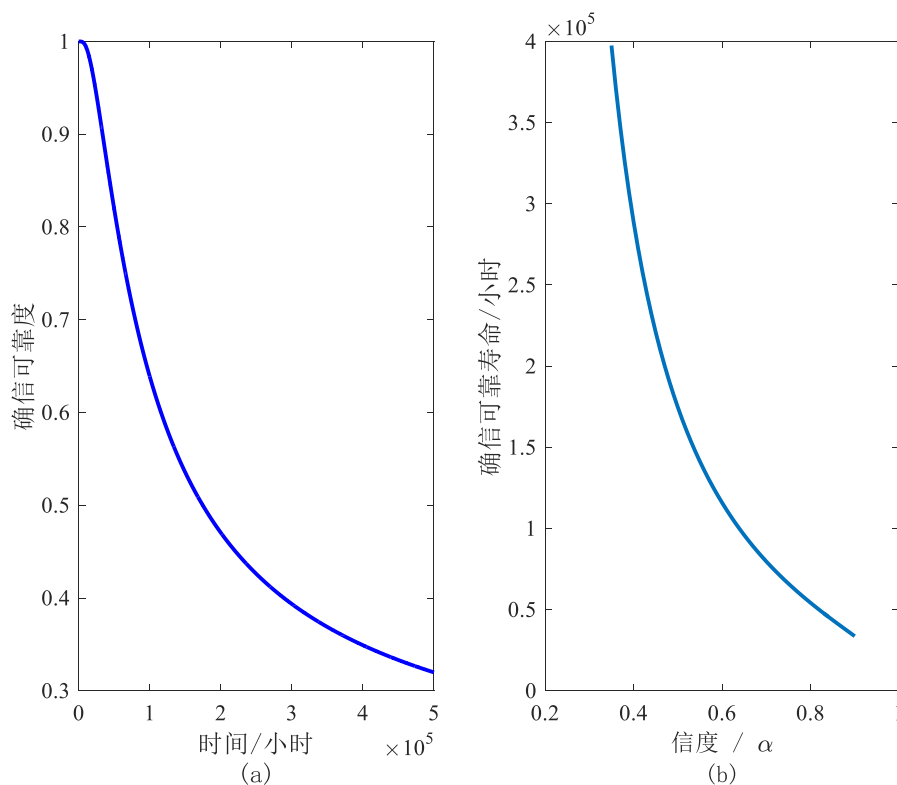


图 21 基于算术刘氏过程的的确信可靠度曲线及确信可靠寿命曲线

从而由式(4.13)和(4.14)可得正常应力条件下的确信可靠度 R_B 及确信可靠寿命 $BL(\alpha)$, 如图 21(a)和(b)所示。由图 21(a)可知, 当决策者关注确信可靠度 $R_B=0.9$ 时, $BL(0.9)=33,633$ 小时, 即有 0.9 的信度产品能够正常使用 33,633 小时。当 $R_B=0.5$ 时, $BL(0.5)=174,646$ 小时, 那么产品能否正常使用到 174,646 小时具有最大的不确定性。

此外, 由图 21(a)可知: 随着时间的增加, 确信可靠度收敛于 0.3198, 该结果可理解为至少有 0.3198 的信度, 产品不会发生故障, 即退化过程未穿过失效阈值。然而, 在实际工程中, 决策者可能更倾向于给出可靠度取值区间为[0, 1]的结论。

通过分析发现, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 式(4.13)给出的确信可靠度 R_B 收敛于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_B(t) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi e}{\sqrt{3}\sigma}\right) \right)^{-1} \quad (4.18)$$

此时, 若 $e \gg \sigma$, 则(4.18)可收敛于 0; 反之, 收敛于大于 0 的常数。以表 11 结果为例, $e = \exp(\alpha_0) = 0.1320$ 且 $\sigma = 0.1195$, 未满足 $e \gg \sigma$, 因此确信可靠度实际严格收敛于 0.1189。

4.4.3 基于一般刘氏过程的确信可靠度评估

为了满足确信可靠度取值区间为[0, 1]性质, 借鉴概率随机过程的性质来构造一般刘氏过程, 即不确定过程 X_t 的期望和方差都与时间 t 成正比。因此, 定义式(4.5)中 $f(t, X_t) = e$ 和 $g(t, X_t) = -\frac{1}{2}t^{-3/2}\sigma$, 则式(4.5)具有零初值的解为

$$X_t = et + \frac{\sigma}{\sqrt{t}}C_t \quad (4.19)$$

同样假设加速应力 s_i 与退化率 e_i 满足式(4.8)。根据式(4.19)可推导出确信可靠度表达式为

$$R_B(t) = 1 - \mathcal{M}\{t_\omega \leq t\} = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(et^\beta - \omega)}{\sqrt{3}\sigma t^{\beta/2}}\right) \right)^{-1} \quad (4.20)$$

可以看出, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 式(4.20)严格收敛于 0。

采用与算术刘氏过程类似的参数估计方法, 以平均秩次法的结果为例, 基于最小二乘法可得不确定加速退化模型参数的估计值, 见表 12。

表 12 基于一般刘氏过程的参数估计结果

参数	α_0	α_1	σ	β	Q
估计值	-2.0934	1.8835	0.4974	0.4572	2.7311

从模型拟合的角度可以看出, 一般刘氏过程的拟合误差为 2.7311, 低于算术刘氏过程的 2.8342, 因而更适用于电连接器的应力松弛数据。

从而由式(4.20)和(4.14)可得正常应力条件下的确信可靠度 R_B 及确信可靠寿命 $BL(\alpha)$,

如图 22(a)和(b)所示。由图 22(a)可知, 当决策者关注确信可靠度 $R_B=0.9$ 时, $BL(0.9)=83,669$ 小时, 即产品能够正常使用到 83,669 小时具有 0.9 的信度。当 $R_B=0.5$ 时, $BL(0.5)=165,578$ 小时, 那么产品能够正常使用到 165,578 小时具有最大的不确定性。

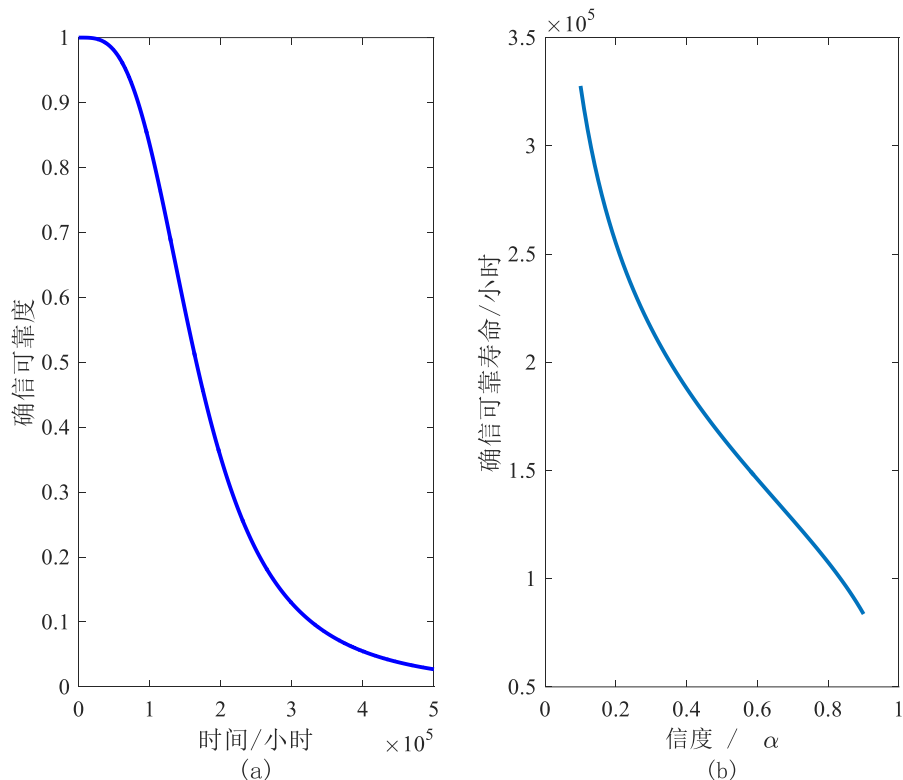


图 22 基于一般刘氏过程的确信可靠度曲线及确信可靠寿命曲线

4.4.4 敏感性分析

在工程应用时, 决策者倾向于选择平稳且敏感度小的可靠度评估结果。本节将通过设置不同的样本数目, 检验不确定测度下基于一般刘氏过程的确信可靠度对于样本量的敏感程度。

首先对图 20 中各加速应力条件下的样本进行从 1 到 6 标记, 然后每次在各应力下选取 n_i 个样本 (n_i 取值在 $[1, 6]$)。因此, 在每个阶段有 $C_6^{n_i}$ 个样本组合来输出相应的可靠性评估结果。例如, 当 $n_i = 2$ 时, 有 $C_6^2 = 15$ 个组合, 分别为 1&2, 1&3, 1&4, ..., 5&6, 其中 1&2 意味着各加速应力下标记为 1 和 2 的样本被选取出来, 最终能够获得 15 组确信可靠度评估结果, 通过在每个时刻取确信可靠度最小和最大值来获得可靠度区间, 同样也可以获得均值。根据此流程, 能够输出各样本量 n_i 下确信可靠度的区间及均值。

采用基于一般刘氏过程的不确定加速退化建模方法, 得到的确信可靠度评估结果如

图 23 所示。由图可知，随着样本量从 2 到 5 不断增加，确信可靠度的区间越来越窄。同时，所有的区间都覆盖 $n_i = 6$ 时的确信可靠度曲线，这意味着增加产品信息会显著降低可靠度和寿命评估结果的认知不确定性。例如，当 $t = 100,000$ 小时，不同样本量下确信可靠度的区间如表 13 所示。其中，当 $n_i = 6$ 时，其值为 0.8348。

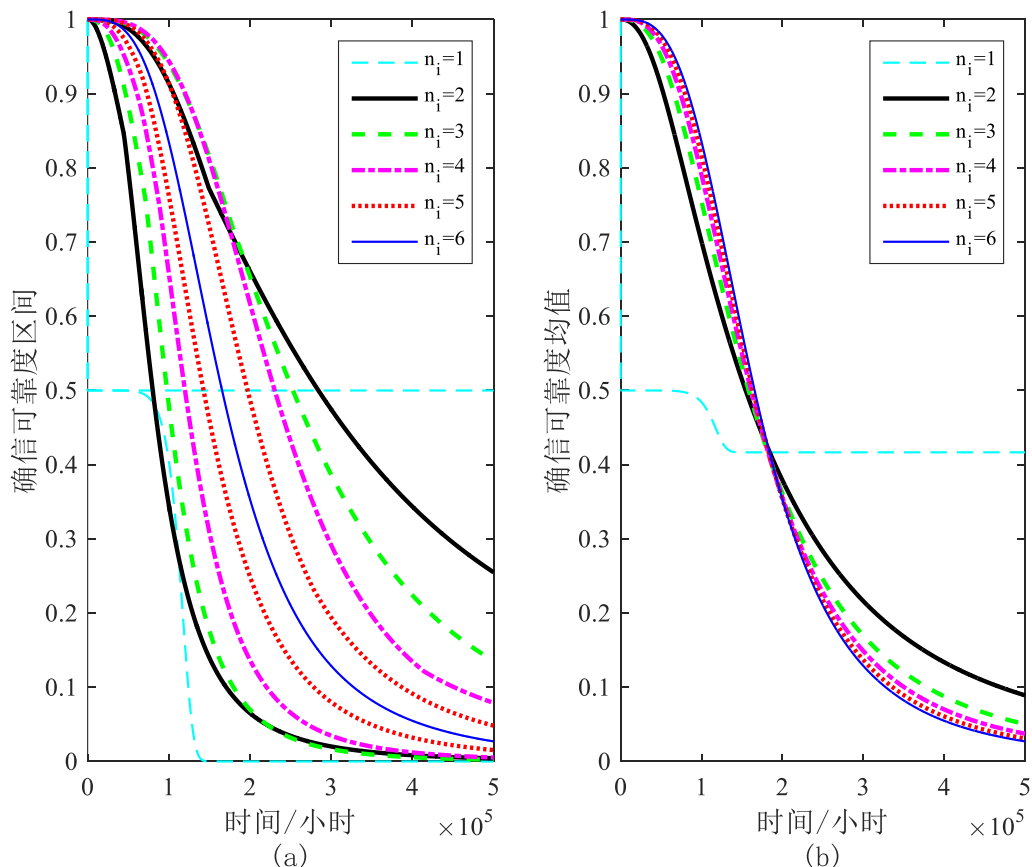


图 23 各样本量下的确信可靠度评估结果

表 13 不同样本量情况下确信可靠度的区间

样本数目	2	3	4	5
确信可靠度 区间	[0.3454, 0.9138]	[0.4798, 0.9401]	[0.6575, 0.9440]	[0.7627, 0.9139]
确信可靠度 均值	0.7004	0.7546	0.7903	0.8161

结合图 23(b)和表 13，可以认为确信可靠度评估结果一致性程度较高，且其均值对样本量不太敏感。从而，小样本导致的认知不确定性问题对决策者影响较小，而随着样本量的增加，评估结果的认知不确定性显著降低，因此该评估结果能够很好地应用于实

际工程。

此外，当 $n_i = 1$ 时，产品确信可靠度最高为 0.5，其原因是 4.3.3 节在确定专家信度水平时，基于平均秩次法人为设定专家信度为 0.5。为了避免各加速应力下仅有一个受试产品的情况，可以邀请专家给出新的信度水平，从而输出相应的确信可靠度评估结果。以标记为 1 的样本为例，假设专家的信度水平为 0.75，那么确信可靠度结果如图 24 所示。

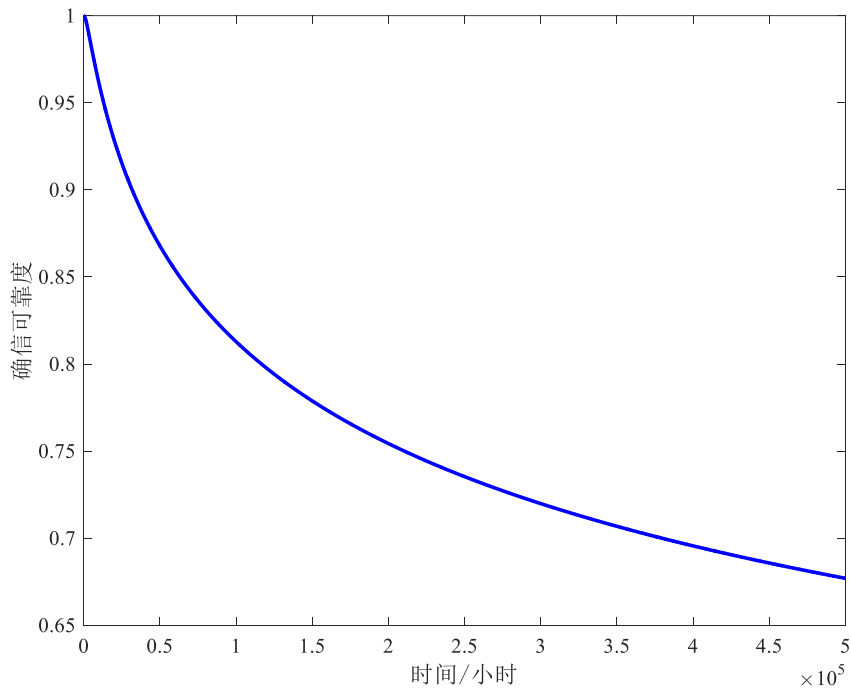


图 24 当 $n_i = 1$ 且信度水平 $\alpha = 0.75$ 时的确信可靠度曲线

4.5 本章小结

本章主要研究了小样本状态下的加速退化建模方法和不确定统计方法。

首先，为了表征小样本下信息缺失引起的认知不确定性问题，提出一种不确定加速退化建模方法，采用不确定过程描述产品的退化过程，根据首穿时分布推导出产品的确信可靠度函数。

其次，基于最小二乘法给出不确定过程的参数估计方法，提出两种专家信度评分方法，用于开展小样本下的确信可靠度评估。

最后，利用电连接器的应力松弛 ADT 数据对本章所提方法进行了验证，通过敏感性分析可知：随着样本量的增加，确信可靠度评估结果的认知不确定性显著降低，且评估均值对样本量敏感度较小。因此，本章所提方法能够有效地处理小样本 ADT 的建模

评估及不确定性量化问题。

第五章 考虑随机过程模型不确定性的 ADT 评估方法

在常规加速退化建模中,通常选取某一特定的随机过程模型来表征产品性能随时间的变化,然而目前还未有研究随机过程模型不确定性对寿命评估的影响。为此,本章基于贝叶斯模型平均方法(Bayesian Model Averaging, BMA)研究 ADT 模型不确定性问题。

5.1 问题描述

由第 1.2.2.2.2 节调研可知,随机过程模型由于其具有时间相关的结构,从而比退化路径模型应用更为广泛。其中,维纳过程模型最为常用,描述退化过程随时间既有增又有减的趋势性。对于单调退化过程,可采用伽马和逆高斯过程模型来保证该单调特性。对于某些工程案例,维纳过程也可用于处理单调退化数据,参见[112]、[178]和[179]。

因此,对于一个 ADT 数据集,可能存在多个模型适用的情况,进而存在模型不确定性的问题。在常规的 ADT 数据分析中还没有考虑该不确定性的影响,这可能会导致完全错误的推断结果。该问题同样存在于加速寿命试验的数据分析中,不同的寿命分布可能适用于描述产品的失效时间数据。文献[180]基于 BMA 方法研究了该问题,并指出寿命分布的选择能够显著影响产品正常使用条件下的寿命评估结果,尤其是在极值分位点。对于 ADT,文献[106, 107]基于阿凯克信息论准则(Akaike's information criterion, AIC)选取合适的模型,但未能考虑模型不确定性对寿命评估结果的影响。在文献[129]中,分别采用了维纳和伽马过程模型,结果显示模型能给出准确的参数估计值。然而,退化模型的选取对寿命评估结果的影响以及如何量化模型不确定性还有待进一步研究。

对于加速模型,文献[180]认为其来源于物理模型或者大量统计信息得到的经验模型,从而在研究加速寿命试验模型不确定性时未考虑加速模型的不确定性,为此本章在研究 ADT 模型不确定性时同样未加以考虑。

关于模型不确定性的量化,较多学者开展了相关的理论研究工作^[72, 181, 182]。文献[183]基于专家经验给出了两类模型不确定性的量化方法,包括替代假设(即模型平均)和修正因子。前者采用混合概率的手段综合所有已知模型,而后者选取一个最优模型作为参考模型,然后基于其他模型的信息加以修正。随后,模型平均的方法进一步扩展为贝叶斯模型平均^[15, 18],该方法集成模型先验知识及依赖于已知数据的模型似然函数。在文献[184]中,采用该方法并结合观测值和预测值差异来表征模型不确定性。

对于模型平均方法,其假设真实模型存在于备选模型集中,从而各模型概率的加和为一,然而实际上真实模型是未知且难以确定的,因此在实际应用时存在一定的争议。为了消除该假设,一些学者基于 Dempster-Shafer (D-S)证据理论,采用信度函数和似然函数来量化模型不确定性^[185, 186]。然而,该方法在根据专家经验给各模型分配信度值方面存在一些困难。

对于修正因子方法,一些学者已在基于外场寿命或退化数据的加速试验模型中开展应用。例如,文献[187]选取指数和威布尔寿命分布作为 Device-A 加速寿命数据的参考模型,采用一个修正因子来刻画实验室环境和外场条件的差异性,从而基于外场失效数据来更新该模型。类似的方法也应用到加速退化建模,参见文献[130]。

本章主要研究加速退化评估中的模型不确定性问题,考虑到 BMA 方法具有很好的数学特性及计算简便性,本章选取该方法进行模型不确定性量化,并考虑三种最常用的随机过程模型,假设真实模型存在于此备选模型集中。

5.2 ADT 评估的统一随机过程模型

5.2.1 统一随机过程模型

在常规 ADT 分析中,通常假设退化量 $X(t)$ 服从一个平稳独立增量的随机过程,其中 $X(t)$ 的期望和方差都与时间函数 $\Lambda(t)$ 成正比。为了简化三个备选模型的参数表达,定义一个具有统计独立增量的双参数统一随机过程模型 $X(t) = USP(a(t), b(t))$,其均值和方差满足

$$E(X(t)) = \mu\Lambda(t) \quad (5.1)$$

$$Var(X(t)) = \sigma^2\Lambda(t) \quad (5.2)$$

式中, μ 和 $\sigma^2 > 0$ 为常数, $\Lambda(t)$ 是时间 t 的非负增函数。对于任意 $t > 0$, $X(t)$ 的概率密度函数依赖于两个参数 $a(t)$ 和 $b(t)$,其值为 a 和 b 随时间的函数。因此,采用符号 $X(t) = USP(a(t), b(t))$,简写为 $X = USP(a, b)$ 。此外,由于 $X(t)$ 的期望和方差都是 $a(t)$ 和 $b(t)$ 的函数,因此式(5.1)和(5.2)隐含着这些函数可以写成 μ, σ^2 和 $\Lambda(t)$ 的表达式。

具体来说,当 $X(t) \sim N(a(t), b(t))$ 时,统一随机过程模型是维纳过程模型。这里, $a(t) = \mu\Lambda(t)$ 是均值, $b(t) = \sqrt{\sigma^2\Lambda(t)}$ 是标准差。对于任意 $t > 0$, $X(t)$ 的概率密度函数为

$f_N(x|a(t), b(t))$, 其中

$$f_N(x|a(t), b(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b(t)}} \exp\left[-\frac{(x-a(t))^2}{2b(t)}\right] \quad (5.3)$$

当 $X(t) \sim Ga(a(t), b(t))$ 时, 统一随机过程模型是伽马过程模型。这里, $a(t) = \mu^2 \Lambda(t) / \sigma^2$ 是形状参数, $b(t) = \sigma^2 / \mu > 0$ 是尺度参数。对于任意 $t > 0$, $X(t)$ 的概率密度函数为 $f_{Ga}(x|a(t), b(t))$, 其中

$$f_{Ga}(x|a(t), b(t)) = \frac{b(t)^{-a(t)}}{\Gamma(a(t))} x^{a(t)-1} \exp\left(-\frac{x}{b(t)}\right), x > 0 \quad (5.4)$$

当 $X(t) \sim IG(a(t), b(t))$ 时, 统一随机过程模型是逆高斯过程模型。这里, $a(t) = \mu \Lambda(t)$ 是均值参数, $b(t) = \mu^3 \Lambda^2(t) / \sigma^2 > 0$ 是形状参数。对于任意 $t > 0$, $X(t)$ 的概率密度函数为 $f_{IG}(x|a(t), b(t))$, 其中

$$f_{IG}(x|a(t), b(t)) = \sqrt{\frac{b(t)}{2\pi x^3}} \exp\left[-\frac{b(t)(x-a(t))^2}{2a(t)^2 x}\right], x > 0 \quad (5.5)$$

基于上述定义, 研究退化模型不确定性对于正常使用条件下 p 分位寿命的影响。

5.2.2 归一化应力的加速模型

加速模型描述加速应力 s_i' 与退化率 μ_i 之间的关系, 可通过受试产品的物理信息或者先验知识来获得。常用的物理加速模型包括阿伦尼乌斯模型、艾林模型等^[86], 经验加速模型包括 Coffin-Manson 模型^[188]等。类似于式(4.8), 一个通用对数线性形式的加速模型可表示为

$$\mu_i = \exp(\alpha_0 + \alpha_1 s_i) \quad (5.6)$$

式中, α_0 和 α_1 是两个常参数, s_i 是归一化后的加速应力水平^[189], 如式(4.9)。则正常使用条件下的退化率 $\mu_0 = \exp(\alpha_0)$ 。

5.2.3 统计推断

对于恒定应力场景, 假设 $X(t_{ijk})$ 是第 i 个应力水平下第 j 个样本的第 k 个退化值,

t_{ijk} 是对应的检测时间, $i = 1, 2, \dots, K, j = 1, 2, \dots, n_i, k = 1, 2, \dots, m_{ij}$, 这里 K 表示应力水平数, n_i 表示第 i 个应力水平下的受试样本数, m_{ij} 表示第 i 个应力水平下第 j 个样本的检测次数。定义 $x(t_{ijk}) = X(t_{ijk}) - X(t_{ij(k-1)})$ 为退化增量, $\Lambda_{ijk} = \Lambda(t_{ijk}) - \Lambda(t_{ij(k-1)})$ 为时间增量。同时选取指数形式的时间变换模型 $\Lambda(t) = t^\gamma$: 当 $\gamma = 1$ 时, 表示时间的线性函数; 否则为非线性。

由式(5.3)、(5.4)和(5.5)定义可知, ADT 数据 D 的似然函数为

$$L(D | \theta) = \prod_{i=1}^K \prod_{j=1}^{n_i} \prod_{k=1}^{m_{ij}} f_{USP}(x_{ijk} | a_{ijk}, b_{ijk}) \quad (5.7)$$

式中, 未知参数向量 $\theta = \{\alpha_0, \alpha_1, \sigma, \gamma\}$, 可通过最大化式(5.7)的对数形式来获得极大似然解 $\hat{\theta}$, 见式(5.8)-(5.10), 这里 M_1 、 M_2 和 M_3 分别表示备选的维纳、伽马和逆高斯过程模型。

$$l(\theta_1 | M_1, D) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \left\{ -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \ln \sigma - \frac{1}{2} \ln \Lambda_{ijk} - \frac{(x_{ijk} - \mu_i \Lambda_{ijk})^2}{2\sigma^2 \Lambda_{ijk}} \right\} \quad (5.8)$$

$$l(\theta_2 | M_2, D) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \left\{ -\ln \Gamma\left(\frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2}\right) - \frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2} \ln\left(\frac{\sigma^2}{\mu_i}\right) + \left(\frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2} - 1\right) \ln x_{ijk} - \frac{\mu_i x_{ijk}}{\sigma^2} \right\} \quad (5.9)$$

$$l(\theta_3 | M_3, D) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \left\{ \frac{3}{2} \ln \mu_i + \ln \Lambda_{ijk} - \frac{1}{2} \ln 2\pi - \ln \sigma - \frac{3}{2} \ln x_{ijk} - \frac{\mu_i (x_{ijk} - \mu_i \Lambda_{ijk})^2}{2\sigma^2 x_{ijk}} \right\} \quad (5.10)$$

需要指出的是在特定情况下, 某些退化过程可能会超过失效阈值, 从而同时存在退化和失效数据。本章研究仅针对退化数据下的模型不确定性分析, 而未考虑二者共存的情况, 后续的研究可以进一步开展, 参见文献[106, 130, 187]。

5.2.4 p 分位寿命及置信区间

本节针对统一随机过程 $USP(a, b)$, 推导给出其 p 分位寿命, 用于维护决策或者验证受试产品的寿命与可靠性水平。

5.2.4.1 正常应力条件下的 p 分位寿命

对于维纳过程而言, 易知退化过程首次穿过失效阈值 ω 的时间 (首穿时) 服从逆高

斯分布，即 $f_T(\Lambda(t)) \sim f_{IG}(\omega/\mu, \omega^2/\sigma^2)$ ，则首穿时的累计分布函数为 $F_T(t) = 1 - \Phi \left[\frac{\omega - \mu\Lambda(t)}{\sqrt{\sigma^2\Lambda(t)}} \right] + \exp\left(\frac{2\omega\mu}{\sigma^2}\right) \Phi \left[-\frac{\omega + \mu\Lambda(t)}{\sqrt{\sigma^2\Lambda(t)}} \right]$ 。这里，最后一项表示事件 $[X(\Lambda(t)) \leq \omega \cup X^*(\Lambda(t)) > \omega]$ 大于零的概率^[190]（式中， $X(t) = \mu t + \delta^2 \cdot B(t)$ 是一个漂移系数为 $\mu > 0$ 、扩散系数为 δ^2 的维纳过程， $B(t)$ 为标准布朗运动且 $X^*(\Lambda(t)) = \sup_{s \in [0, t]} X(\Lambda(s))$ ）。事实上，事件 $T > t$ 与 $X(\Lambda(t)) \leq \omega$ 不相等。然而当 $\mu \gg \sigma$ 时，故此项可忽略，因为维纳过程可认为是非减的。因此，首穿时分布近似为 $F_T(t) \cong 1 - \Phi \left[\frac{\omega - \mu\Lambda(t)}{\sqrt{\sigma^2\Lambda(t)}} \right]$ 。同样，对于伽马和逆高斯过程而言，此近似解依然适用，参见文献[106]和[191]。具体来说， $X(t)$ 近似服从均值 $\mu\Lambda(t)$ 和方差 $\sigma^2\Lambda(t)$ 的正态分布，见式(5.1)和(5.2)。当给定失效阈值 ω ，首穿时 T 的累计分布函数可近似为

$$F_T(t) = P(X(t) > \omega) \cong 1 - \Phi \left[\frac{\omega - E(x)}{\sqrt{\text{Var}(x)}} \right] = 1 - \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{\beta}{\Lambda(t)} \right)^{1/2} - \left(\frac{\Lambda(t)}{\beta} \right)^{1/2} \right] \right] \quad (5.11)$$

式中， $\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\omega\mu}}$ 和 $\beta = \frac{\omega}{\mu}$ 。因此， $\Lambda(t)$ 是关于 α 和 β 的两参数 Birnbaum-Saunders (BISA) 分布^[106, 190]。BISA 分布的概率密度函数为

$$f_{BISA}(x | \alpha, \beta) = \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{x}{\beta} \right)^{-1/2} + \left(\frac{x}{\beta} \right)^{-3/2} \right] \exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{x}{\beta} - 2 + \frac{\beta}{x} \right) \right], x > 0 \quad (5.12)$$

从而，随机变量 T 的 p 分位寿命为^[192]

$$t_p = \Lambda^{-1} \left[\frac{\beta}{4} \left(\alpha z_p + \sqrt{4 + \alpha^2 z_p^2} \right)^2 \right] \quad (5.13)$$

式中， z_p 是标准正态分布的 p 分位点， $\Lambda^{-1}(\cdot)$ 是 $\Lambda(\cdot)$ 的逆函数。因此，将 $\mu = \mu_0$ 代入式(5.13) 即可得到正常使用条件下的 p 分位寿命值。

5.2.4.2 基于费舍尔信息矩阵的近似置信区间

为了构造基于极大似然信息的置信区间，可以选择经验（观测）或期望费舍尔信息矩阵，参见文献[193]和[194]。根据极大似然的最优渐进正态分布特性，可知分位寿命 \hat{t}_p 的渐近分布为

$$\hat{t}_p \approx N(t_p, A \text{var}(\hat{t}_p)) \quad (5.14)$$

式中， $A \text{var}(\hat{t}_p)$ 是 \hat{t}_p 的渐进方差。这里，采用 $\widehat{A \text{var}}(\hat{t}_p)$ 得到 $A \text{var}(\hat{t}_p)$ 的局部估计值，即

$$\widehat{\text{Avar}}(\hat{t}_p) = (\nabla t_p)' \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_c) \nabla t_p \quad (5.15)$$

式中, ∇t_p 表示式(5.13)中 t_p 对参数 $\boldsymbol{\theta}_c$ 的一阶偏导, $\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_c)$ 表示式(5.16)中期望信息矩阵 $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_c)$ 的逆, $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_c)$ 和 ∇t_p 中元素见附录 A 和 B。同时, 将极大似然值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 代入式(5.16)即可得到这些元素的值。

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_c) = \begin{pmatrix} E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_c | M_c, D)}{\partial \alpha_0^2} \right] & E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_c | M_c, D)}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1} \right] & E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_c | M_c, D)}{\partial \alpha_0 \partial \sigma^2} \right] & E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_c | M_c, D)}{\partial \alpha_0 \partial \gamma} \right] \\ & E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_c | M_c, D)}{\partial \alpha_1^2} \right] & E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_c | M_c, D)}{\partial \alpha_1 \partial \sigma^2} \right] & E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_c | M_c, D)}{\partial \alpha_1 \partial \gamma} \right] \\ & & E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_c | M_c, D)}{\partial (\sigma^2)^2} \right] & E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_c | M_c, D)}{\partial \sigma^2 \partial \gamma} \right] \\ \text{对称} & & & E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_c | M_c, D)}{\partial \gamma^2} \right] \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

由于分位寿命 t_p 恒为正值, 因而采用对数变换方法来构造 t_p 的近似 $100(1-q)\%$ 置信区间^[136]

$$\left[\hat{t}_p / \exp \left(z_{1-q/2} \frac{\sqrt{A \text{var}(\hat{t}_p)}}{\hat{t}_p} \right), \hat{t}_p \exp \left(z_{1-q/2} \frac{\sqrt{A \text{var}(\hat{t}_p)}}{\hat{t}_p} \right) \right] \quad (5.17)$$

需要注意的是: 对于伽马和逆高斯过程而言, 前述的 p 分位寿命 t_p 及其置信区间是显然的, 因为两种模型所表征的退化过程是严格递增的; 对于维纳过程而言, 忽略指数项会使得 p 值比设定值大 (如 0.01, 0.5), 从而 t_p 值会变大且置信区间变宽, 更加容易地覆盖真实值。表 16 和表 17 给出的维纳过程模型的结果显示, 该近似可能导致其具有较宽的区间和可接受的收敛概率。

5.3 基于贝叶斯模型平均的模型不确定性量化

为了量化退化模型不确定性对 p 分位寿命的影响, 本章选用贝叶斯模型平均方法, 通过集成各备选模型的推断结果来量化模型不确定性^[15]。本节将简单介绍 BMA 方法的基本理论, 然后给出 MCMC 实施方法。

5.3.1 贝叶斯模型平均方法

定义 Δ 是关注的特征量, 如正常使用条件下的 p 分位寿命 t_p , 其依赖于数据 D 的后

验分布为

$$f(\Delta|D) = \sum_{c=1}^C f(\Delta|M_c, D)P(M_c|D) \quad (5.18)$$

式中, $f(\Delta|M_c, D)$ 表示假设 M_c 为真实模型时 Δ 的后验密度函数; $P(M_c|D)$ 表示 M_c 为真实模型时的后验模型概率, 其作为模型平均的系数, 即

$$P(M_c|D) \propto f(D|M_c)P(M_c) \quad (5.19)$$

式中, $P(M_c)$ 表示 M_c 为真实模型时的先验模型概率, $f(D|M_c)$ 表示模型 M_c 的集成似然函数。定义 θ_c 为模型 M_c 的参数空间, 其参数先验为 $f(\theta_c|M_c)$, 则式(5.19)中的集成似然函数为

$$f(D|M_c) = \int L(D|\theta_c, M_c) f(\theta_c|M_c) d\theta_c \quad (5.20)$$

式中, $L(D|\theta_c, M_c)$ 表示 $M_c(c=1, 2, \dots, C)$ 的似然函数。

5.3.2 MCMC 实施方法

由式(5.19)和(5.20)可知, 集成似然函数的积分形式很难获取解析解。为了开展基于 BMA 的模型不确定性分析, 本节给出一种 MCMC 实施方法, 借助 WinBUGS 软件^[195]从模型参数后验分布 $f(\theta_c|D, M_c)$ 中抽取一定的样本, 将参数样本代入式(5.13)即可开展 p 分位寿命推断。

1) 模型先验概率 $P(M_c)$

模型先验概率的设置可根据专家知识或者同类产品前期 ADT 来获得, 如果没有该类信息, 可均匀分配概率值, 如本章中 $P(M_c) = 1/3, c = 1, 2, 3$ 。

2) 参数先验 $f(\theta_c|M_c)$

参数向量 θ_c 为 $\{\alpha_{0c}, \alpha_{1c}, \sigma_c, \gamma_c\}$ 。这里, 无信息先验将不适用。首先, 由统一随机过程模型 $USP(a, b)$ 可知 $\sigma_c > 0$; 其次, 对于温度应力 ADT 而言, α_{1c} 是与激活能有关的参数, 且高温应力水平会加速退化过程, 故 α_{1c} 应当大于零; 对于表征退化趋势的参数 γ , 可通过式 $x = \mu t^\gamma$ 对各退化路径进行非线性拟合来获取必要的先验信息。此外, 由伽马和逆高斯过程的非负增量特性可知, γ 必须大于零, 见式(5.4)和(5.5)。因此, 根据 5.2.3 节的极大似然结果 $\hat{\theta}_c$, 设置统计独立且有信息的先验如下所示:

$$\begin{aligned}
f(\alpha_{0c} | M_c) &\sim f_N(\alpha_{0c} | \hat{\alpha}_{0c}, 0.01) \\
f(\alpha_{1c} | M_c) &\sim f_N(\alpha_{1c} | \hat{\alpha}_{1c}, 0.01) \\
f(\sigma_c | M_c) &\sim f_{Ga}(\sigma_c | 100\hat{\sigma}_c^2, 0.01/\hat{\sigma}_c) \\
f(\gamma_c | M_c) &\sim f_N(\gamma_c | \hat{\gamma}_c, 0.01)
\end{aligned} \tag{5.21}$$

这里, 为了第 5.4 和 5.5 章的案例分析, 参数先验分布的方差设置为 0.01。对于其他案例, 可以根据极大似然获得的参数标准差来设定该值, 如表 14 所示, 其中 WinBUGS 软件中的参数精度是设定方差的倒数。针对参数 α_{1c} 和 γ_c , 假设其服从正态分布, 但必须满足 $P(\alpha_{1c} < 0) \approx 0$ 和 $P(\gamma_c < 0) \approx 0$ 来保证其非负特性, 否则应当选取截尾正态、对数正态或者伽马分布。

3) 参数后验 $f(\theta_c | D, M_c)$

当获取加速退化数据 D 时, 由标准贝叶斯理论以及式(5.7)和(5.21)可知, 参数 θ_c 的后验分布为

$$f(\theta_c | D, M_c) \propto f(\theta_c | M_c) \cdot \prod_{i=1}^K \prod_{j=1}^{n_i} \prod_{k=1}^{m_{ij}} f_{USP}(x_{ijk} | a_{ijk}, b_{ijk}) \tag{5.22}$$

从而, 基于 Gibbs 抽样策略从式(5.22)中迭代抽取参数后验样本, 根据 Gelman-Rubin 指标也检验抽样链的收敛特性, 即近似于 1 的程度^[195]。类似应用可参见文献[130]和[196]。当抽样链收敛时, 从参数后验向量中先丢弃一定样本作为老化阶段 (如前 1000 个), 然后抽取固定数量的样本用于后续计算, 即 $\tilde{\theta}_c^i = [\tilde{\alpha}_{0c}^i, \tilde{\alpha}_{1c}^i, \tilde{\sigma}_c^i, \tilde{\gamma}_c^i], i = 1, 2, \dots, d$, 如 $d = 5000$ 。

注意式(5.21)中的参数先验来源于真实数据的极大似然估计值, 然后采用相同数据构造如式(5.22)中的似然函数来加以更新, 因此该方法并不是完整的贝叶斯流程。然而, 该方法能够生成类似于先验的后验参数, 从而用于先验信息稀缺条件下的 p 分位寿命计算, 并能提供较为理想的结果^[180, 197]。

4) 模型后验概率 $P(M_c | D)$

由式(5.19)及 $P(M_c) = 1/3$ 可知, 模型后验概率与集成似然函数 $f(D | M_c)$ 成正比, 从而可由式 (5.21) 参数先验 $f(\theta_c | M_c)$ 中抽取一定样本来近似获得, 即 $\vec{\theta}_c^i = [\vec{\alpha}_{0c}^i, \vec{\alpha}_{1c}^i, \vec{\sigma}_c^i, \vec{\gamma}_c^i], i = 1, 2, \dots, r$ 。则模型后验概率为

$$P(M_c | D) \propto \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r L(D | \vec{\alpha}_{0c}^i, \vec{\alpha}_{1c}^i, \vec{\sigma}_c^i, \vec{\gamma}_c^i) \tag{5.23}$$

定义 $Sum_c = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r L(D|\bar{\alpha}_{0c}^i, \bar{\alpha}_{1c}^i, \bar{\sigma}_c^i, \bar{\gamma}_c^i)$, 则 $P(M_c|D) = Sum_c / \sum_{c=1}^C Sum_c$ 。

5) p 分位寿命 t_p 的模型平均

假设从式(5.22)中抽取 d 组参数样本, 首先对于每个模型 M_c , 将 $\bar{\theta}_c^i$ 代入式(5.13)可得其 p 分位寿命 t_{pc} , 然后依赖于 $P(M_c|D)$ 直接对 t_{pc}^i 进行模型平均, 从而由一组参数样本集可同时开展单一模型和 BMA 模型分析。算法如下:

(i) 由式(5.22)抽取参数样本 $\bar{\theta}_c^i, i = 1, 2, \dots, d, c = 1, 2, 3$

(ii) 设定 p 值

(iii) $i \leftarrow 1$

由式(5.13)计算 $t_{pc}^i, c = 1, 2, 3$

从均匀分布[0,1]中生成随机数 r_i

若 $r_i \in [0, P(M_1|D)]$, 则 $t_p^i = t_{p1}^i$; 若 $r_i \in [P(M_1|D), \sum_{c=1}^2 P(M_c|D)]$, 则 $t_p^i = t_{p2}^i$;

否则, $t_p^i = t_{p3}^i$

(iv) 当 $i \leftarrow d$ 时结束

从而基于 BMA 的统计推断可以由选定的 t_p^i 分析获取, 如中位值、 $(1 - q)\%$ 统计可信区间等。此外, BMA 结果能够与单一模型和 5.2.3 节极大似然结果进行对比, 从标准贝叶斯和频率的角度验证 BMA 方法的优势。

5.4 案例分析

本节采用应力松弛 ADT 数据(和 4.4.1 节案例一致)来说明 ADT 中模型不确定性, 及其对正常使用条件下 p 分位寿命评估结果的影响。应力松弛是一种部件由于恒定应变引起电阻随时间而损耗的现象。例如, 电连接器的接触件由于过度应力松弛而失效。原始数据来源于文献[177], 并列在文献[191]的 TABLE IV 中, 试验采用三个温度加速应力 (65、85、100°C), 正常应力是 40°C。当应力松弛达到 30% 时, 认为电连接器失效, 即 $\omega = 30$ 。

5.4.1 极大似然估计分析

文献[191]基于逆高斯过程模型开展 ADT 建模并设计最优试验方案, 然而没有考虑模型不确定性。这里, 采用 5.2 节的统一退化模型 $USP(a,b)$ 进行 ADT 数据分析, 参数的极大似然解如表 14 所示, 这里参数估计的标准差是通过期望费舍尔信息矩阵取逆的

对角阵平方根来得到。通过将表 14 所列结果代入式(5.13)和(5.17)，可得正常使用条件下的各分位点寿命的极大似然值和对应的 95%统计正态近似置信区间，如图 25 所示。图 25(c)和(d)能够直观展示各备选模型寿命评估结果的差异性，取 $p = (0.01, 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95, 0.99)$ 。

表 14 统一随机过程模型未知参数的极大似然解及其标准差

模型	α_0	std	α_1	std	σ	std	γ	std	l_{max}	AIC
M_1	-2.2811	0.2411	2.0047	0.2064	0.4538	0.0360	0.4726	0.0173	-225.3	458.5
M_2	-1.6391	0.1841	1.4323	0.1387	0.4685	0.0367	0.4518	0.0161	-215.9	439.8
M_3	-1.5954	0.1740	1.4098	0.1223	0.5185	0.0497	0.4484	0.0158	-217.6	443.1

这里，同时计算得到期望和经验费舍尔信息矩阵，从而比较二者的区别。对于模型 M_1 ，分别为

$$I(\theta_1)_{\text{expected}} = \begin{pmatrix} 849.9045 & 743.0543 & 0 & 6.3226e3 \\ 743.0543 & 673.8037 & 0 & 5.4793e3 \\ 0 & 0 & 2.1816e3 & 3.6469e3 \\ 6.3226e3 & 5.4793e3 & 3.6469e3 & 5.6562e4 \end{pmatrix}$$

和

$$I(\theta_1)_{\text{empirical}} = \begin{pmatrix} 849.9045 & 743.0543 & -2.7878e-5 & 6.3226e3 \\ 743.0543 & 672.4577 & -2.7158e-5 & 5.4793e3 \\ -2.7878e-5 & -2.7158e-5 & 2.1816e3 & 3.6469e3 \\ 6.3226e3 & 5.4793e3 & 3.6469e3 & 5.6671e4 \end{pmatrix}。$$

可以看出，二者基本上相同，同样对于模型 M_2 和 M_3 也如此。因而，本章选用期望费舍尔信息矩阵构造 p 分位寿命的置信区间是合理的。

由图 25(c)和(d)可知， M_1 的 p 分位寿命值大于另外两个模型，且具有较宽的置信区间，置信下限甚至大于 M_2 和 M_3 的极大似然值。对于 M_2 和 M_3 ，如果关注于中间分位点 ($p = 0.5$)，则二者的区别可以忽略。具体来说， M_2 的 $t_{0.5}$ 为 70,036(40,623, 120,740)小时，而 M_3 为 69,066(38,742, 123,130)小时。然而，二者区别在极值分位点较为显著。比如，对于模型 M_2 ， $t_{0.01}(t_{0.99})$ 的极大似然值和 95%统计置信区间分别为 25,988(188,740)和(16,107, 41,932) ((100,181, 355,570))小时；而对于 M_3 ，结果分别为 23,457(203,360)和(14,180, 38,802) ((103,130, 400,980))小时。此外，在低分位点($p < 0.5$)， M_3 的极大似然值小于 M_2 ，而在高分位点则大于 M_2 。

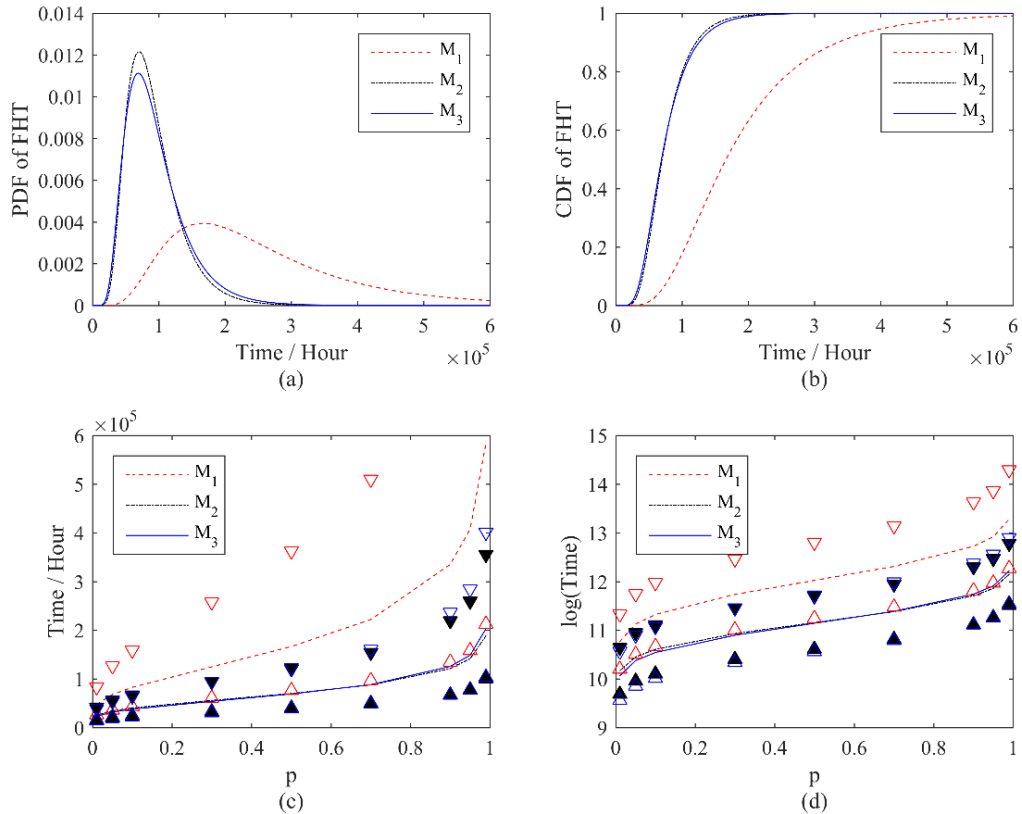


图 25 首穿时的概率密度函数(a)和累计概率密度函数(b), t_p 的极大似然估计值和 95%统计置信区间((c)正常尺度和(d)对数尺度, ∇ 和 Δ 分别表示上界和下界)

由以上分析可知, 随机过程模型的选择会显著影响 p 分位寿命的推断。通常来说, AIC 可以作为模型选择的指标, 其值越小模型越优。由表 14 可知, M_2 的 AIC 指标(439.8)最小, 可以选取该模型。然而, 此模型选择方法仅能表明模型对数据的拟合程度, 而不能定量给出模型对寿命评估结果的影响^[180]。尽管对于应力松弛数据而言, 伽马过程是拟合程度最好的模型, 而文献[191]人为选取逆高斯过程作为退化模型来进行 ADT 分析, 同样的问题也可能存在于另外两个模型, 见文献[109, 129], 因此应当考虑模型不确定性的影响。本章选取 BMA 方法进行模型不确定性量化, 评价其对寿命评估的影响。

5.4.2 BMA 分析

根据 5.3.2 节的流程, 抽取 10000 个样本计算得到各备选模型的后验概率, $P(M_1|D) = 7.1041e - 5$, $P(M_2|D) = 0.8146$, $P(M_3|D) = 0.1854$ 。该结果表明对于应力松弛 ADT 数据, 伽马过程是最优的模型, 该结论与基于 AIC 的模型选择结果相一致。可以看出, 模型 M_1 的贡献可以忽略不计, 因此 t_p 的后验样本分别以 0.8146 和 0.1854 的概率从 M_2 和 M_3 获得。选用 5.3.2 节的算法开展 BMA 统计推断, 所设定的先验分布方差 0.01 适用于生成先验样本。图 26 分别给出了中间和极值分位点处 M_2 和 M_3 的后验密度函数(采用

MATLAB 中 *ksdensity* 函数), 包括 $t_{0.01}$ 、 $t_{0.50}$ 和 $t_{0.99}$ 。

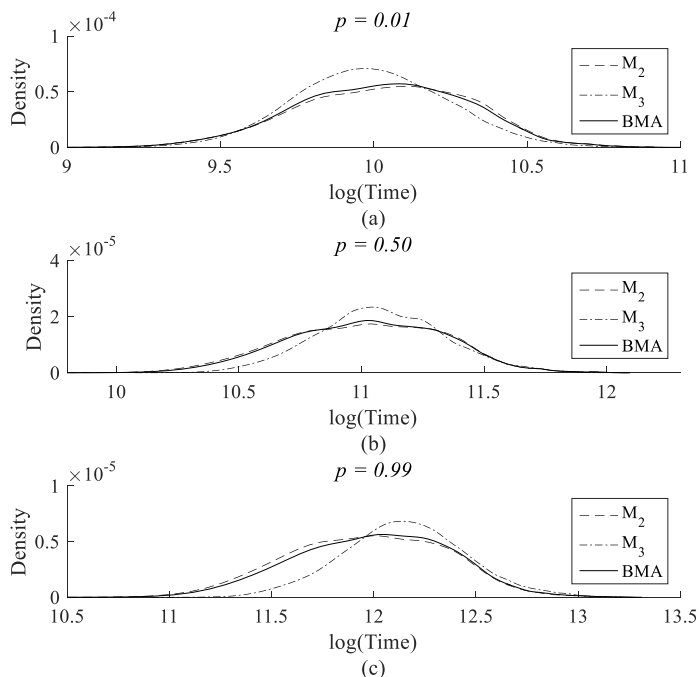


图 26 (a) $t_{0.01}$ 、(b) $t_{0.50}$ 和(c) $t_{0.99}$ 的后验密度 (对数尺度)

由图 26 可知, M_2 和 M_3 的后验密度函数在极值分位点差异较大, 而在中间分位点则相似, 同时鉴于 M_2 是最优模型且具有较大的后验概率, 多数 BMA 样本来源于 M_2 。为了比较单一模型和 BMA 的结果, 对 M_2 和 M_3 的 t_{pc}^i 以及 BMA 的 t_p^i 进行排序, 选取后验中位值及其 95% 统计可信区间, 如表 15 所示。

表 15 M_2 、 M_3 和 BMA 的后验中位值及 95% 统计可信区间 (单位: 小时)

模型	分位点	中位值	95% 统计可信区间
M_2	0.01	2.5190e4	[1.4297e4, 4.1077e4]
	0.50	6.8834e4	[3.5687e4, 1.2129e5]
	0.99	1.8666e5	[8.7705e4, 3.6325e5]
M_3	0.01	2.3106e4	[1.4606e4, 3.7888e4]
	0.50	6.8762e4	[4.2084e4, 1.1883e5]
	0.99	2.0607e5	[1.1576e5, 3.8676e5]
BMA	0.01	2.4739e4	[1.4331e4, 4.0745e4]
	0.50	6.8550e4	[3.6661e4, 1.2134e5]
	0.99	1.9122e5	[9.0412e4, 3.6808e5]

当 $p=0.01$ 和 0.99 时, 模型差异分别在 1,000 和 10,000 小时附近, 而当 $p=0.50$ 时, 差异仅 300 小时。该结果进一步验证选取不同的退化模型会得到显著差异的结果, 尤其是在极值分位点, 同样对于可信区间存在类似的结论。由表 15 可知, BMA 区间上下界分别在 M_2 和 M_3 的上下界之间, 比如当 $p=0.01$ 时 BMA 区间下界为 14,331 小时, 而 M_2 和 M_3 的区间下界分别为 14,297 和 14,606 小时。

通过 5.4.1 和 5.4.2 节的极大似然和 BMA 分析可知, 对于同一 ADT 数据, 忽略模型不确定性会导致显著差异的 p 分位寿命评估结果。

5.5 仿真案例

本节将通过仿真案例对比分析 BMA 的统计可信区间与单一模型 M_c 的区间, 表明 BMA 方法在刻画模型不确定性方面的优势。为了简化起见, 将表 14 中的极大似然结果作为真实值进行三温度应力水平的 ADT 数据仿真。总样本量 n 分别设置为 18 和 36 来评估样本量对寿命评估结果的影响, 设置各应力水平下的试验样本数相同。考虑到采用维纳过程 M_1 进行仿真时会出现负增量的情况, 因而假设此时 $P(M_1|D) = 1, P(M_2|D) = P(M_3|D) = 0$ 。在每个时刻 t_{ijk} (见文献[191]的 TABLE V), 第 i 个应力下的退化路径 $X(t_{ijk})$ 的仿真流程如下:

- 1) 选取工作模型 M_c
- 2) 针对模型 M_c , 根据式(5.3)-(5.5)中 $USP(a,b)$ 的参数设置, 选定表 14 参数值进而生成退化增量值 x_{ijk} , 其中 $\Lambda(t_{ijk}) = t_{ijk}^Y - t_{ij(k-1)}^Y$
- 3) 输出 $X(t_{ijk}) = \sum_{l=1}^k x_{ijl}$

在每次仿真循环中, 首先采用表 14 中的参数真实值生成 ADT 数据, 然后基于仿真数据估计参数极大似然值 $\hat{\theta}$, 用于构造式(5.21)中的先验分布。这里, 考虑到极大似然估计值在真值附近, 因此 $P(\alpha_{1c} < 0) \approx 0$ 和 $P(\gamma_c < 0) \approx 0$ 的假设依然适用, 从而保证其非负特性。具体来说, $P(\alpha_{13} < 0) = 1.9534e - 45 \approx 0$ 和 $P(\gamma_c < 0) = 3.6628e - 6 \approx 0$ 。最后, 输出模型 M_c 和 BMA 在各个分位点 95% 的统计可信区间。与此同时, 基于 $AIC(M_{AIC})$ 和最高后验概率 (M_{HP}) 的模型选择方法也给出相应的统计置信和统计可信区间, 从频率和贝叶斯的角度与 BMA 方法进行对比。本章设定仿真循环为 1000, 记录各模型输出区间的收敛概率 (Coverage probability, CP) 和平均区间长度 (Average interval length, AL)

两个指标。

当模型 M_c 分别为伽马和逆高斯过程时, 结果如表 16 和表 17 所示。通过仿真分析, 可以得到一些结论如下:

- 1) 当 M_2 是真实模型时, 错误设定为 M_3 的区间 CP 值低于 0.8。随着 p 的增大, M_3 的表现也越来越差, 在增加样本时其值甚至低于 0.2。如图 25 所示: M_2 和 M_3 的差异随 p 值增加而增大。故选取模型 M_3 而非 M_2 时, 这种差异性会导致其输出的置信区间较难覆盖 M_2 的真实值。因此, 模型错误定义的问题较为严重。
- 2) 当 M_3 是真实模型时, 错误设定为 M_2 的区间表现较好且少样本下 CP 值在 0.9 附近。由表 17 可知在 $n = 18$ 且 $p \leq 0.5$ 的情况下, 错误模型 M_2 的 CP 值甚至大于真实模型 M_3 , 同时具有较窄的区间宽度。原因可能来源于: 基于极大似然值的参数先验分布设定、MC 仿真中 CP 和 AL 的近似以及两个模型的物理相似性^[115]。然而, 当增加样本量 $n = 36$ 时, 模型错误定义的问题比 $n = 18$ 时严重。
- 3) 不同场景下, 模型 M_1 都有理想的 CP 值, 且大于 0.84。原因在于 M_1 将单调退化路径看做同时存在增和减增量的情况, 从而退化的瞬时不确定性 (或维纳过程性质) 使得其具有比真实模型更宽的 AL 值, 从而更加容易覆盖真值。
- 4) 由表 16 和表 17 中的 CP 和 AL 值可知, BMA 的表现优于 M_{AIC} , 并稍微好于 M_{HP} , 其综合考虑了各备选模型 M_c 的贡献, 从而具有更宽的区间长度, 但要窄于模型 M_1 。这些结果表明 BMA 能够较好地刻画 ADT 中存在的模型不确定性。

5.6 本章小结

在常规 ADT 分析中, 随机过程模型常用于高可靠长寿命产品的退化建模及寿命评估, 包括维纳过程、伽马过程和逆高斯过程。本章基于 BMA 方法主要研究随机过程模型不确定性对正常使用条件下 p 分位寿命的影响。通过对应力松弛 ADT 数据的分析可知, 选取不同的模型会得到显著不同的 p 分位寿命估计结果, 尤其是在极值分位点处。进一步通过仿真案例表明 BMA 方法能够很好地量化模型不确定性影响, 在各分位点能够给出妥协的统计可信区间且具有最高的收敛概率。

表 16 当伽马过程为真实模型时的 CP 及 AL 指标

	P	0.01	0.05	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.95	0.99	
$n = 18$	M_1	0.885	0.900	0.903	0.913	0.917	0.918	0.926	0.929	0.931	
		2.9870e4	4.3774e4	5.3855e4	8.3371e4	1.1307e5	1.5333e5	2.3716e5	2.9167e5	4.2764e5	
	M_2	0.937	0.937	0.937	0.933	0.935	0.935	0.933	0.931	0.932	
		2.7051e4	3.7601e4	4.4983e4	6.5799e4	8.5977e4	1.1256e5	1.6630e5	2.0048e5	2.8371e5	
	M_3	0.774	0.692	0.648	0.543	0.487	0.451	0.411	0.397	0.363	
		4.2364e4	6.6893e4	8.7336e4	1.6483e5	2.7970e5	5.2803e5	1.5672e6	2.7246e6	7.6146e6	
	M_{HP}	0.937	0.937	0.935	0.932	0.934	0.934	0.933	0.931	0.932	
		2.7116e4	3.7717e4	4.5140e4	6.6106e4	8.6461e4	1.1332e5	1.6771e5	2.0236e5	2.8692e5	
	M_{AIC}	0.907	0.905	0.908	0.910	0.906	0.907	0.904	0.905	0.904	
		2.7401e4	3.7904e4	4.5231e4	6.5814e4	8.5669e4	1.1172e5	1.6406e5	1.9716e5	2.7762e5	
	BMA	0.937	0.937	0.935	0.932	0.934	0.934	0.932	0.931	0.933	
		2.7175e4	3.7853e4	4.5347e4	6.6589e4	8.7260e4	1.1465e5	1.7024e5	2.0581e5	2.9267e5	
	$n = 36$	M_1	0.917	0.926	0.928	0.932	0.933	0.939	0.945	0.947	0.950
			1.9739e4	2.8443e4	3.4638e4	5.2391e4	6.9848e4	9.3013e4	1.4014e5	1.7017e5	2.4360e5
M_2		0.945	0.944	0.945	0.944	0.939	0.943	0.943	0.942	0.942	
		1.8002e4	2.4883e4	2.9679e4	4.3115e4	5.6015e4	7.2892e4	1.0666e5	1.2794e5	1.7940e5	
M_3		0.693	0.561	0.496	0.370	0.305	0.245	0.183	0.170	0.141	
		2.8843e4	4.4880e4	5.7742e4	1.0200e5	1.5748e5	2.5212e5	5.2715e5	7.6365e5	1.5427e6	
M_{HP}		0.944	0.943	0.945	0.944	0.939	0.942	0.942	0.941	0.941	
		1.8005e4	2.4890e4	2.9690e4	4.3138e4	5.6053e4	7.2957e4	1.0679e5	1.2811e5	1.7968e5	
M_{AIC}		0.940	0.938	0.938	0.939	0.939	0.939	0.938	0.938	0.934	
		1.8402e4	2.5402e4	3.0271e4	4.3885e4	5.6948e4	7.4002e4	1.0803e5	1.2943e5	1.8113e5	
BMA		0.945	0.944	0.945	0.944	0.939	0.943	0.943	0.942	0.942	
		1.8010e4	2.4904e4	2.9715e4	4.3200e4	5.6163e4	7.3135e4	1.0714e5	1.2858e5	1.8050e5	

表 17 当逆高斯过程为真实模型时的 CP 及 AL 指标

	P	0.01	0.05	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.95	0.99	
$n = 18$	M_1	0.846	0.864	0.876	0.898	0.904	0.906	0.917	0.922	0.929	
		2.9569e4	4.4850e4	5.6250e4	9.0793e4	1.2692e5	1.7743e5	2.8672e5	3.6008e5	5.4818e5	
	M_2	0.927	0.928	0.930	0.929	0.926	0.916	0.911	0.903	0.897	
		2.3836e4	3.2747e4	3.8939e4	5.6215e4	7.2774e4	9.4368e4	1.3741e5	1.6449e5	2.2989e5	
	M_3	0.926	0.926	0.928	0.924	0.922	0.922	0.931	0.932	0.933	
		2.3992e4	3.3180e4	3.9660e4	5.8190e4	7.6511e4	1.0109e5	1.5201e5	1.8508e5	2.6767e5	
	M_{HP}	0.924	0.924	0.926	0.923	0.921	0.920	0.929	0.927	0.929	
		2.3969e4	3.3141e4	3.9607e4	5.8083e4	7.6339e4	1.0080e5	1.5145e5	1.8432e5	2.6634e5	
	M_{AIC}	0.927	0.923	0.926	0.925	0.920	0.918	0.915	0.916	0.915	
		2.4229e4	3.3285e4	3.9636e4	5.7667e4	7.5328e4	9.8854e4	1.4711e5	1.7819e5	2.5508e5	
	BMA	0.927	0.925	0.928	0.926	0.925	0.926	0.930	0.931	0.933	
		2.4000e4	3.3193e4	3.9677e4	5.8259e4	7.6628e4	1.0131e5	1.5241e5	1.8554e5	2.6835e5	
	$n = 36$	M_1	0.889	0.912	0.923	0.934	0.944	0.948	0.953	0.955	0.956
			1.9429e4	2.8959e4	3.5943e4	5.6601e4	7.7584e4	1.0623e5	1.6638e5	2.0570e5	3.0423e5
M_2		0.939	0.934	0.928	0.913	0.890	0.871	0.844	0.833	0.809	
		1.5839e4	2.1678e4	2.5713e4	3.6908e4	4.7561e4	6.1358e4	8.8660e4	1.0571e5	1.4663e5	
M_3		0.942	0.940	0.940	0.943	0.948	0.947	0.947	0.946	0.947	
		1.6144e4	2.2271e4	2.6580e4	3.8826e4	5.0867e4	6.6944e4	9.9995e4	1.2128e5	1.7397e5	
M_{HP}		0.942	0.940	0.940	0.943	0.948	0.947	0.947	0.946	0.947	
		1.6143e4	2.2269e4	2.6575e4	3.8815e4	5.0848e4	6.6913e4	9.9935e4	1.2120e5	1.7384e5	
M_{AIC}		0.942	0.938	0.938	0.938	0.936	0.935	0.934	0.931	0.930	
		1.6337e4	2.2464e4	2.6761e4	3.8954e4	5.0885e4	6.6760e4	9.9255e4	1.2014e5	1.7168e5	
BMA		0.942	0.940	0.940	0.943	0.948	0.947	0.949	0.947	0.948	
		1.6142e4	2.2270e4	2.6581e4	3.8838e4	5.0898e4	6.7002e4	1.0012e5	1.2143e5	1.7424e5	

第六章 非完备 ADT 数据的融合评估方法

在产品寿命周期各阶段，都可以获取有关产品寿命的信息，比如产品研发过程中开展各类试验项目以及投入市场后的使用和维护等。与此同时，在对新研产品进行寿命与可靠性评估时，由于信息源有限，需要借助于相似产品信息来加以支持。从而，本章在现有多源数据融合评估方法的基础上，研究存在应力类型不确定性的非完备数据集融合评估问题。

6.1 问题描述

通常来说，产品在实际使用中经受多种应力条件，如湿度、温度、振动等，因此为了准确考核产品寿命与可靠性指标，试验条件应尽可能模拟实际使用环境来加速退化/失效过程。然而，考虑到试验设备的能力及决策者判断，通常加速试验仅施加一种或两种试验类型，这就给试验数据的统计推断结果带来了一定的不确定性。

为了更为合理地开展评估工作，现有研究采用多源信息融合技术来综合产品在多阶段、多层次和多性能参数的寿命信息，从而更全面地辨识产品寿命与可靠性状态，常用的方法有加权系数法、多层模型法及贝叶斯方法^[198, 199]。在加速试验领域，目前研究较多的是加速寿命/退化数据与外场数据的融合评估，见[128, 130, 187, 200]，本论文第七章将着重综述与分析该部分研究现状。而对于内场信息融合方面，主要考虑加速退化和失效数据共存的情况。Padgett 和 Tomlinson[105]基于连续累积损伤理论并采用高斯过程描述产品性能退化过程，给出一种系统寿命推断方法，进一步研究还有[106, 107, 114, 201]。

然而，现有对多源加速退化数据融合的研究，主要针对相同应力类型或组合下的数据融合。在实际工程中，不同寿命阶段或者相似产品信息通常表现为不同的应力类型及水平。忽略应力类型的不确定性会使得评估结果过于片面，从而无法达到信息融合评估的目的。

因此，本章针对应力类型不确定性研究多源非完备 ADT 数据的融合评估方法，采用集合理论和概率分配方法，构建综合评估模型，全面把握多源数据及应力类型不确定性的影响，给出合理的寿命与可靠性评估结果。

6.2 多源非完备 ADT 数据的融合评估方法

6.2.1 基于维纳过程的退化模型及多项式加速模型

假设产品性能退化过程 $X(t)$ 服从形如式(2.1)的维纳过程, 即

$$X(t) \sim N(\mu\Lambda(t), \sigma^2\Lambda(t)) \quad (6.1)$$

式中, 参数含义与第二章相同。根据第五章描述, 时间变换模型 $\Lambda(t)$ 选取指数形式, 即 $\Lambda(t) = t^\gamma$ (当 $\gamma = 1$ 时, 表示时间的线性函数; 否则为非线性)。从而, 产品的可靠度函数和可靠寿命满足式(2.5)和(2.6)。

通常假设式(6.1)中 μ 是与 S 有关的参量, 即加速模型, 表征随着应力水平的增加, 产品性能退化过程得到加速。常见的加速模型可以变换为对数线性模型, 假设各应力相互独立, 则

$$\mu = \exp\{A + \sum_l B_l \varphi(s_l)\} \quad (6.2)$$

式中, A 和 B_l 为常数, $l=1,2,\dots,L$ (L 表示应力类型数目), $\varphi(\cdot)$ 为应力相关的函数, 通常有如下形式

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1/s & s = T \\ \ln s & s = I \\ s & s = V \\ \dots & \text{其他} \end{cases} \quad (6.3)$$

式中, T 、 I 和 V 分别表示为温度、电流和电压。

6.2.2 集合理论及概率分配融合方法

6.2.2.1 非完备融合问题

由退化模型(6.1)可知, μ 和 σ 是直接决定寿命与可靠性评估结果的关键参数, 其中 μ 是与应力 S 有关。因而, 在研究多源非完备 ADT 数据融合时, 应该考虑和量化应力类型不同的影响。这里, 假设有 C 个 ADT 数据集 $D_c (c = 1, 2, \dots, C)$, 每个数据集是在应力类型集合 $S_c = \{s_1^c, s_2^c, \dots, s_{L_c}^c\}$ 下获得 (L_c 表示第 c 个数据集的应力类型数目)。相应地, 加速模型(6.2)可表示为

$$\mu^c = \exp\{A^c + \sum_l B_l^c \varphi(s_l^c)\} \quad (6.4)$$

为了简化融合模型的计算复杂度, 假设各应力类型对应的参数具有一致性。例如,

若 B_1^1 和 B_1^2 分别是数据集 1 和 2 中与温度应力有关的参数, 则二者具有相同含义, 都可以表示为 B_1 。因此, 定义当 $s_i^m = s_j^n$, 则 $B_i^m = B_j^n = B_i$, 从而待估参数 B_i 的数目与所有数据集包含的应力类型数目相同。对于参数 A^c , 则定义 $A^c = A$ 。此外, 本章假设不同 ADT 数据集下产品的故障机理保持不变, 即不因应力类型的不同而引发新的故障机理。

在给出非完备 ADT 数据集的融合评估方法之前, 本章首先介绍几种特殊的数据融合情况:

1) 多源非完备 ADT 数据的融合 (假设应力类型集合 S_c 相同)

此情况针对各 ADT 数据集 D_c 在相同的应力类型集合 S_c 下获得, 例如各数据集都是在温度和电应力共同施加下获得, 则加速应力类型集 $S_c = \{\text{温度}, \text{电应力}\}$ 。从而, 该类试验数据集可等效为在应力类型 $S = S_c$ 下获取 ADT 数据 $D = \{D_1, D_2, \dots, D_c\}$, 则可构造如下融合模型

$$\begin{cases} X_c(t) \sim N(\mu^c \Lambda(t), \sigma^2 \Lambda(t)) \\ \downarrow \\ X(t) \sim N(\mu \Lambda(t), \sigma^2 \Lambda(t)) \end{cases} \quad (6.5)$$

式中, $\mu = \mu^c$ 。

此时, 我们可以进一步假设各数据集对应的受试产品存在一定差异性, 为此对各数据集分配概率为 p_c 且 $\sum_c p_c = 1$, 则可构造如下加权融合模型

$$\begin{cases} X_c(t) \sim N(p_c \mu^c \Lambda(t), \sigma^2 \Lambda(t)) \\ \downarrow \\ X(t) \sim N(\sum_c p_c \mu^c \Lambda(t), \sigma^2 \Lambda(t)) \end{cases} \quad (6.6)$$

2) 多源非完备 ADT 数据的融合 (假设应力类型集合 S_c 相互独立)

此情况针对各 ADT 数据集 D_c 在不同的应力类型集合 S_c 下获得, 且 $S_i \cap S_j = \emptyset$ 。例如, 两个数据集分别在温度和电应力施加下获得, 则加速应力类型集 $S_1 = \{\text{温度}\}$ 和 $S_2 = \{\text{电应力}\}$ 。考虑到此时数据集之间相互独立, 从而假设各数据集的发生概率为 p_c 且 $\sum_c p_c = 1$, 则可构造如式(6.6)的加权融合模型

$$\begin{cases} X_c(t) \sim N(p_c \mu^c \Lambda(t), \sigma^2 \Lambda(t)) \\ \downarrow \\ X(t) \sim N(\sum_c p_c \mu^c \Lambda(t), \sigma^2 \Lambda(t)) \end{cases} \quad (6.7)$$

3) 多源非完备 ADT 数据的融合 (应力类型集合 S_c 不相互独立)

在工程实际中，多源数据集来源较为复杂，试验样本也互有差异，因而通常表现为应力类型不相互独立的多源数据集，即 $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ 。例如，两个数据集分别在温度、温度和电应力共同施加下获得，则加速应力类型集 $S_1 = \{\text{温度}\}$ 和 $S_2 = \{\text{温度}, \text{电应力}\}$ 。由于此时数据集之间不相互独立，因而无法直接给各数据集分配发生概率，这就给多源非完备 ADT 数据的融合评估带来了新的难题。

6.2.2.2 基于集合理论的解决方案

针对多源非完备 ADT 数据集，简单的处理方式是直接给单一数据集分配发生概率，从而类似于 6.2.2.1 节第 2 种情况进行处理，然而该处理方式无法解释发生概率的实际含义。因此，一种合理的分配方法是基于互斥的应力集合来给出，从而单个数据集可由多个互斥集合的并集下获得。例如，6.2.2.1 节第 3 种情况，易知应力类型集合 $S = \{\text{温度}, \text{电应力}\}$ ，重新构造互斥集合为 $S'_1 = \{\text{温度}\}$ 和 $S'_2 = \{\text{电应力}\}$ ，分配相应的发生概率为 p'_1 和 p'_2 。由于 $S_1 = S'_1$ 和 $S_2 = S'_1 \cup S'_2$ ，则对数据集 D_1 和 D_2 分配发生概率 $p_1 = p'_1$ 和 $p_2 = p'_1 + p'_2$ ，并且分配的概率值能够直接表示各应力类型对产品加速退化信息的贡献程度。

基于此思想，本章提出基于集合理论的多源非完备 ADT 数据的融合评估方法，流程见图 27，步骤如下：

- 1) 构造应力类型全集 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_c\}$ ，其中 $S_c = \{s_1^c, s_2^c, \dots, s_{L_c}^c\}$ ；
- 2) 判断各数据集 D_c 的应力类型集合 S_c 是否互斥：若是，则原始数据集的应力集合 S_c 发生概率可表示为 p_c 且 $\sum_c p_c = 1$ ，并转到 5)；若不是，则重新定义全集 S ，转到 3)；
- 3) 基于全集 S 构造 R 个互斥应力集合，即 $S' = \{S'_1, S'_2, \dots, S'_R\}$ 且 $S'_i \cap S'_j = \emptyset (i \neq j)$ ，分配相应的发生概率为 $p' = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_R\}$ ，且 $\sum_r p'_r = 1 (r = 1, \dots, R)$ ，其中 $p'_c = Pr\{\text{集合}S'_c\}$ ；
- 4) 根据互斥集合发生概率是其子集发生概率之和，则原始数据集的应力集合 S_c 发生概率可表示为 $p_c = Pr\{S_c\} = Pr\{\cup (S'_r \in S_c)\} = \sum_r p'_r \cdot I(S'_r \in S_c)$ ，其中 $I(\cdot)$ 为指示函数（当 $S'_r \in S_c$ 时为 1，否则为 0）；
- 5) 构造加权融合模型如下

$$\begin{cases} X_c(t) \sim N(p_c \mu^c \Lambda(t), \sigma^2 \Lambda(t)) \\ \Downarrow \\ X(t) \sim N(\sum_c p_c \mu^c \Lambda(t) / \sum_c p_c, \sigma^2 \Lambda(t)) \end{cases} \quad (6.8)$$

可以看出, 式(6.5)-(6.7)皆为其特殊情况, 因而模型(6.8)具有更广泛的适用性, 并在多源 ADT 数据融合过程中刻画出应力类型所带来的认知不确定性问题, 保证寿命与可靠性评估结果的合理性和可信性。

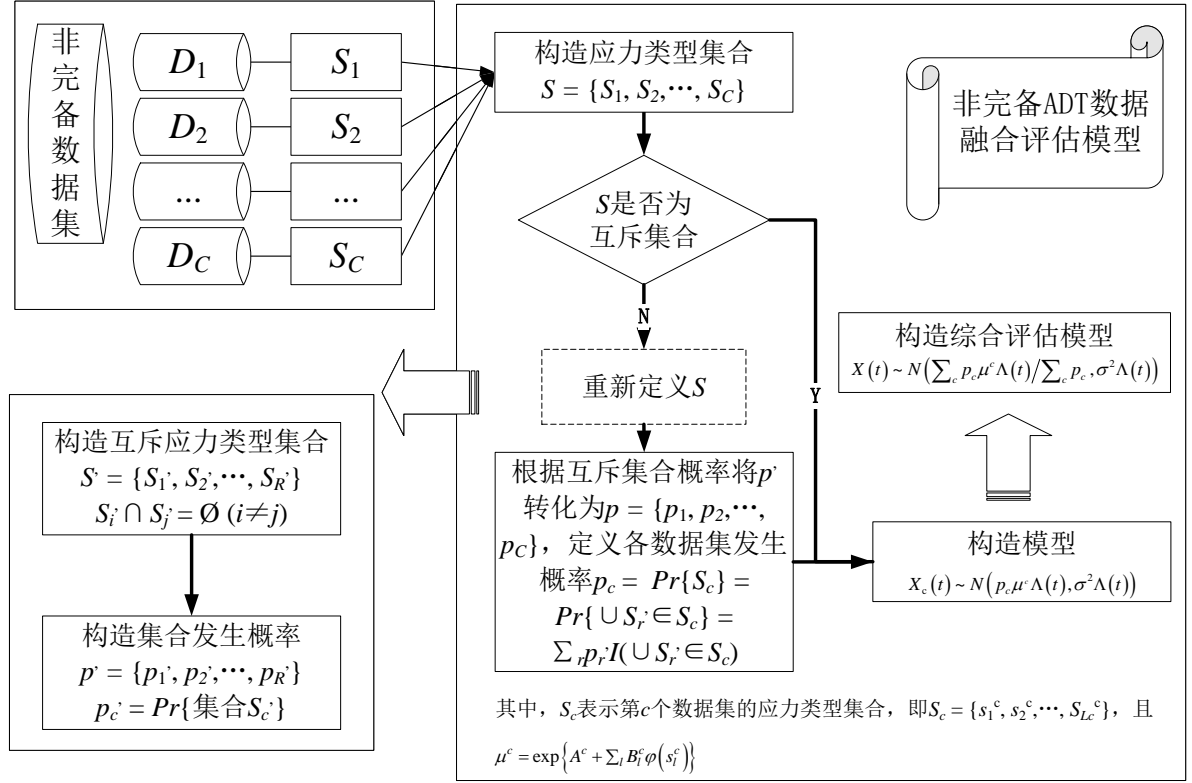


图 27 非完备 ADT 数据集的融合评估方法

针对前述融合评估模型, 易知未知参数为 $\Theta = \{A, B_l, p_r', \sigma, \gamma\}$, 其中, A 和 B_l 为加速模型参数, σ 和 γ 是退化模型参数, p_r' 为非完备 ADT 数据集融合参数。根据式(6.4)和(6.8), 可以给出参数的似然函数

$$L(D_1, \dots, D_C | \Theta) = \prod_{c=1}^C \prod_{i=1}^{K^c} \prod_{j=1}^{n_i^c} \prod_{k=1}^{m_{ij}^c} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Lambda_{ijk}^c}} \exp\left(-\frac{(x_{ijk}^c - p_c \mu_i^c \Lambda_{ijk}^c)^2}{2\sigma^2\Lambda_{ijk}^c}\right) \quad (6.9)$$

式中, $X(t_{ijk}^c)$ 为数据集 D_c 在第 i 个应力水平第 j 个样本第 k 个监测点的退化数据值, t_{ijk}^c 为对应的监测时间, K^c 表示数据集 D_c 的应力水平数, n_i^c 表示数据集 D_c 在第 i 个应力水平下的样本数, m_{ij}^c 表示数据集 D_c 在第 i 个应力水平下第 j 个样本的监测次数。令 $x_{ijk}^c = X(t_{ijk}^c) - X(t_{ij(k-1)}^c)$ 为退化数据增量, $\Lambda_{ijk}^c = \Lambda(t_{ijk}^c) - \Lambda(t_{ij(k-1)}^c)$ 为退化时间函数的增

量。

因此，通过寻优算法最大化似然函数(6.9) (或其对数形式)，则可以得到参数的极大似然估计值 $\hat{\Theta}$ ，从而开展综合评估。根据式(2.5)和(6.8)，可知综合评估的可靠性函数为

$$R(t) = \Phi\left(\frac{\omega - \Lambda(t) \sum_c p_c \mu^c / \sum_c p_c}{\sigma \sqrt{\Lambda(t)}}\right) - \exp\left(\frac{2\omega \sum_c p_c \mu^c / \sum_c p_c}{\sigma^2}\right) \Phi\left(-\frac{\omega + \Lambda(t) \sum_c p_c \mu^c / \sum_c p_c}{\sigma \sqrt{\Lambda(t)}}\right) \quad (6.10)$$

6.2.3 基于贝叶斯理论的模型更新

对于某些产品，在开展试验评估前会存在一定的先验信息，包括专家经验、相似产品历史评估信息等，这些信息可以与非完备 ADT 数据集相融合，通过贝叶斯方法来进行模型更新。因此，模型参数的后验概率分布正比于

$$\pi(\Theta | D_1, \dots, D_C) \propto \prod_{c=1}^C \prod_{i=1}^{K^c} \prod_{j=1}^{n_i^c} \prod_{k=1}^{m_{ij}^c} \left(\frac{1}{\sigma^2 \Lambda_{ijk}^c}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x_{ijk}^c - p_c \mu_i^c \Lambda_{ijk}^c)^2}{2\sigma^2 \Lambda_{ijk}^c}\right) \cdot \pi(\Theta) \quad (6.11)$$

式中， $\pi(\Theta)$ 表示参数的联合先验概率分布。假设参数间相互独立，则

$$\pi(\Theta) = \pi(A) \cdot \pi(B_l) \cdot \pi(p_r') \cdot \pi(\sigma) \cdot \pi(\gamma) \quad (6.12)$$

由式(6.11)和(6.12)构成的贝叶斯模型更新方程，既可以作为专家经验等先验信息的迭代更新，也可以用于模型参数的贝叶斯求解^[199]。

6.3 仿真案例分析

本节通过仿真的方法，对所提多源非完备 ADT 数据集的融合评估方法进行分析验证，并对具体步骤加以说明。

表 18 两个非完备 ADT 数据集的仿真参数设置

数据集	应力类型	应力水平	A	B _l		σ	γ	p' ₁ /温度	p' ₂ /电应力	失效阈值 ω
				B ¹ ₁ = B ² ₁	B ² ₂					
D ₁	温度/°C	50、80、100	-5	-500	/	0.005	1.5	0.7	0.3	10
D ₂	温度/°C-电应力/A	60-2、90-3			1					

6.3.1 参数设置

假设某产品在投产之前进行了两个阶段的恒定应力加速退化试验，通过数据收集整理，数据集信息如表 18 所示。设定各数据集在各应力水平下，监测时间间隔为 5 小时、监测次数为 20 次以及样本量为 10 个。两个阶段的仿真数据如图 28 和图 29 所示。

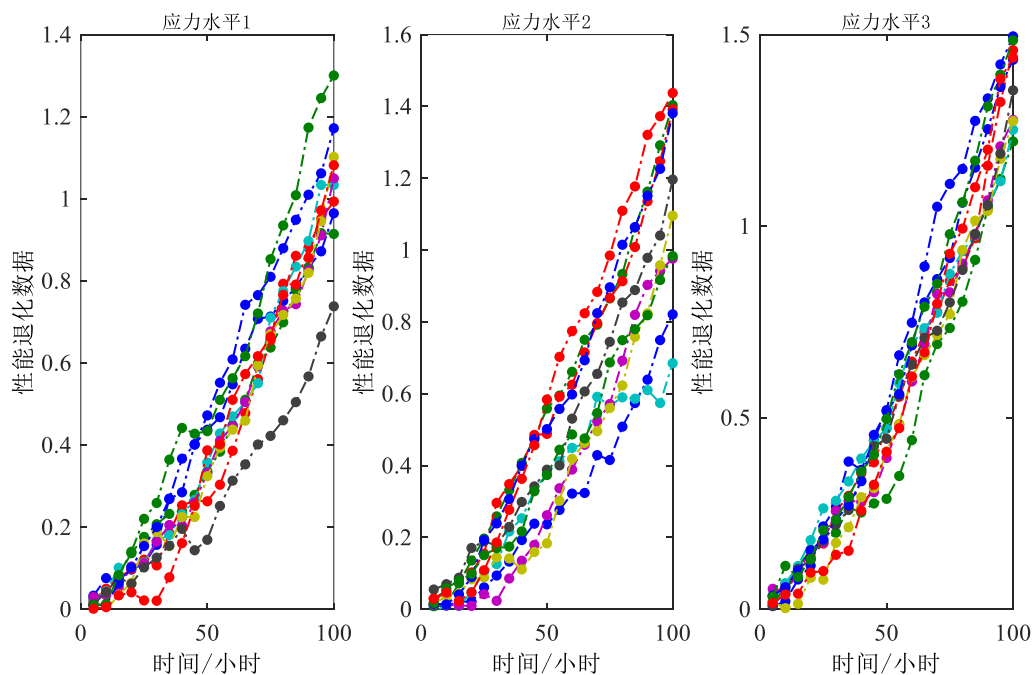


图 28 非完备 ADT 数据集 1: 三应力水平, 加速应力: 温度

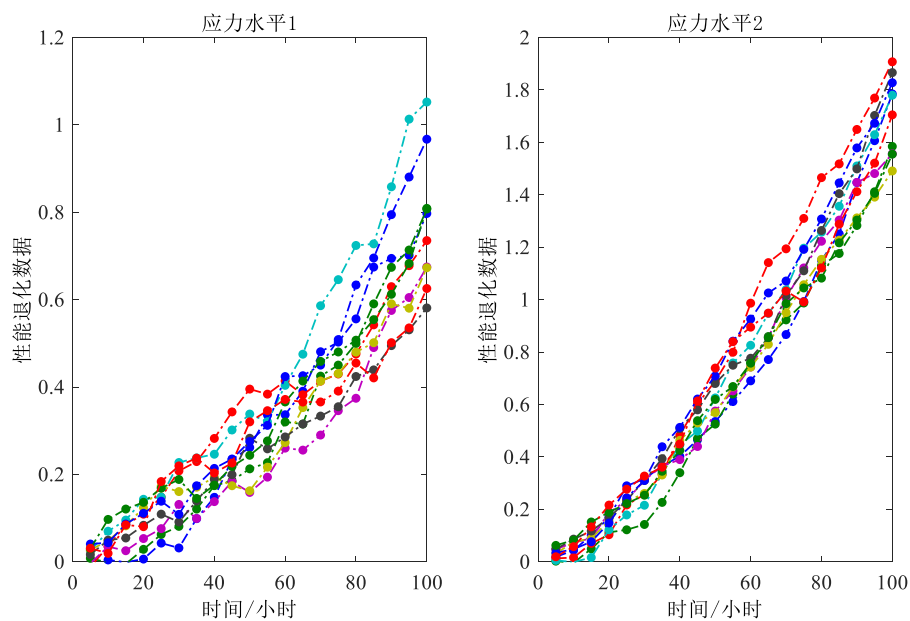


图 29 非完备 ADT 数据集 2: 两应力水平, 加速应力: 温度和电应力

根据仿真设置, 加速应力类型集 $S_1 = \{\text{温度}\}$ 和 $S_2 = \{\text{温度、电应力}\}$, 从而 $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, 因此属于不独立非完备 ADT 数据集融合评估问题。根据第 6.2.2 节的流程, 进行非完备 ADT 数据集的融合评估, 流程如下:

- 1) 构造应力类型全集 $S = \{S_1 = \{\text{温度}\}, S_2 = \{\text{温度、电应力}\}\}$;
- 2) 由于 $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, 则重新定义全集 S ;
- 3) 基于全集 S 构造 2 个互斥应力集合, 即 $S' = \{S'_1 = \{\text{温度}\}, S'_2 = \{\text{电应力}\}\}$ 且 $S'_1 \cap S'_2 = \emptyset$, 分配相应的发生概率为 $p' = \{p'_1, p'_2\}$, 且 $p'_1 + p'_2 = 1$;
- 4) 原始数据集的应力集合 S_1 和 S_2 发生概率可表示为: $p_1 = Pr\{S_1\} = p'_1$, $p_2 = Pr\{S_2\} = p'_1 + p'_2 = 1$;
- 5) 根据式(6.8), 构造加权融合模型:

$$\begin{cases} X_1(t) \sim N(p_1\mu^1\Lambda(t), \sigma^2\Lambda(t)) \\ X_2(t) \sim N(p_2\mu^2\Lambda(t), \sigma^2\Lambda(t)) \end{cases} \downarrow \quad (6.13)$$

$$X(t) \sim N((p_1\mu^1 + p_2\mu^2)\Lambda(t)/(p_1 + p_2), \sigma^2\Lambda(t))$$

6.3.2 参数估计及可靠度评估结果

根据 6.3.1 节分析, 采用极大似然估计方法估计模型参数, 见式(6.9), 并采用下式估计相对误差

$$RE = \left| \frac{\Theta_{est} - \Theta_{real}}{\Theta_{real}} \right| \times 100\% \quad (6.14)$$

表 19 两个非完备 ADT 数据集的参数估计结果及相对误差

参数	A	B_t		σ	γ	$p'_1/\text{温度}$	$p'_2/\text{电应力}$
		$B_1^1 = B_1^2$	B_2^2				
Θ_{real}	-5	-500	1	0.005	1.5	0.7	0.3
Θ_{est}	-4.8878	-523.48	0.9559	0.005	1.4904	0.7126	0.2874
RE (%)	2.2440	4.6964	4.4058	0.3971	0.6418	1.7937	4.1852

融合评估模型参数评估结果如表 19 所示。由表可知, 极大似然估计方法具有较高的估计精度且最大估计相对误差小于 4.7%, 因此本章提出的方法能很好地用于多源非

完备 ADT 数据的综合评估。

此外，我们需要评估产品在正常使用条件下（25℃-0.5V）的寿命与可靠度指标，因而将表 19 中的模型参数代入式(6.10)，可得到综合评估可靠度结果如图 30 所示。与此同时，单一数据集的可靠度评估结果也列于图 30 中。由图可知，融合评估模型综合考虑两类数据集的贡献，其可靠度评估结果位于仅采用数据集 1 和 2 的评估结果之间，因而更好地融合了两个非完备 ADT 数据集的信息，实现有效地融合评估。

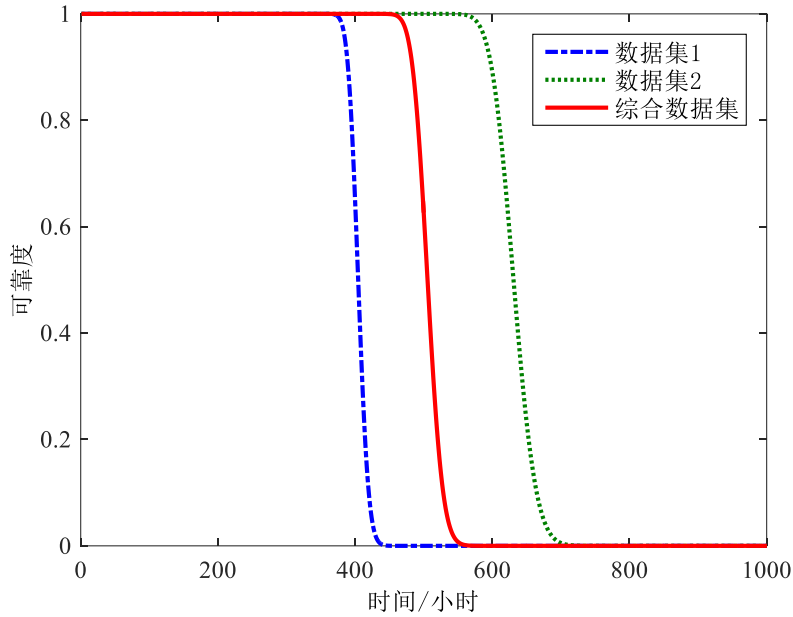


图 30 可靠度综合评估结果 VS 单一数据集评估结果

这里，我们可能考虑是否需要采用互斥集合方法来量化各数据集存在的应力类型相关性，因此假设不考虑该相关性，直接对两个数据集分配概率发生权重 p_1 和 p_2 ，如 6.2.2.1 节第 2 种情况所示，则参数评估结果如表 20 所示。可以看出，对于单一数据集模型参数而言，其估计结果近似于考虑互斥关系的结果（见表 19），从而基于单一数据集给出的可靠性评估结果相近似。然而，应力类型发生的概率分配结果相差较大，原因在于表 20 没有考虑两个非完备 ADT 数据集之间存在温度应力的相关性。

表 20 不考虑应力类型相关性的参数估计结果

参数	A	B_l		σ	γ	$p_1/\text{温度}$	$p_2/\text{温度-电应力}$
		$B_1^1 = B_1^2$	B_2^2				
Θ_{est}	-4.3498	-523.48	0.9559	0.005	1.4904	0.4161	0.5839

图 31 给出了两种情况下的可靠度综合评估结果。可知不考虑应力类型相关性的评

估结果偏于保守，而本章基于互斥集合的融合方法能够充分利用数据信息，给出更为合理的产品寿命与可靠性评估结果，从而为产品后续维护方案的制定提供科学合理的依据。

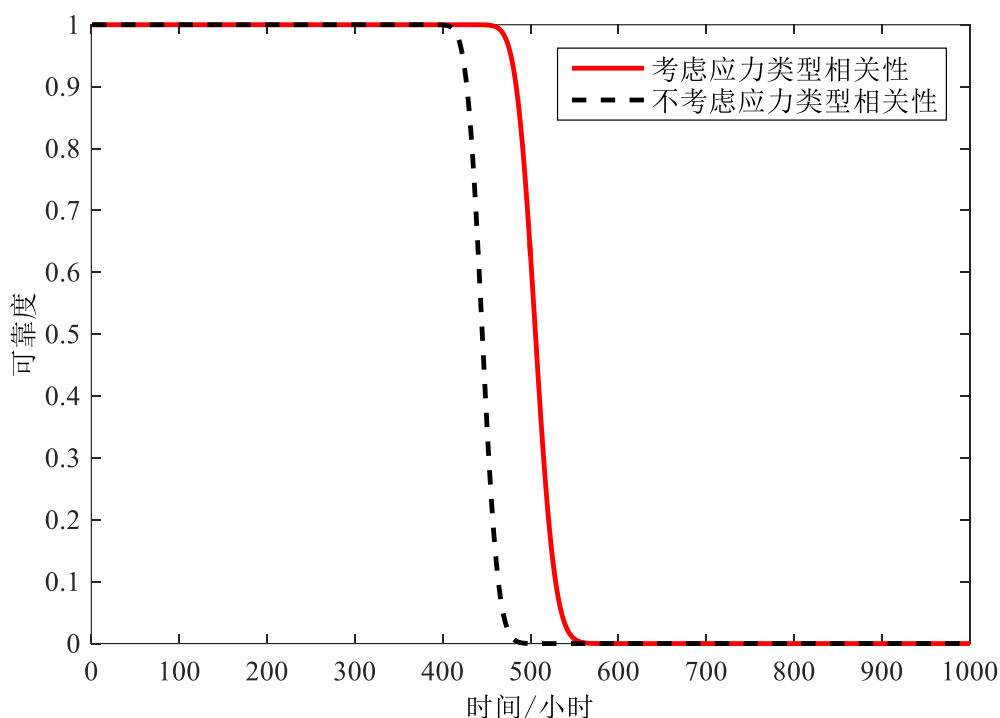


图 31 考虑与不考虑应力类型相关性的可靠度曲线

6.4 锂离子电池应用实例

本节以美国 A123 Systems 公司生产的 ANR26650M1B 锂离子电池为例，通过两个阶段的加速退化试验，收集得到电应力、温度和电应力下的电池容量性能退化数据。基于本章所提方法，开展非完备 ADT 数据的融合评估。

6.4.1 试验情况及数据收集

ANR26650M1B 是一种集成纳米电子技术的磷酸铁锂电池，标称容量为 2.5Ah，最大充电电流为 10C，连续放电电流可达 30C。与此同时，该类电池在 10C 放电电流下的循环寿命达到 1000 次以上，属于高可靠长寿命产品，实物见图 32。



图 32 磷酸铁锂电池实物图

邹田骥[202]详细介绍了锂离子电池加速试验平台,如图 33 所示,并开展以放电倍率(放电电流)为加速应力的步进应力加速退化试验,试验剖面如图 34 所示。试验参数如下:应力类型 $S_1 = \{\text{放电倍率}\} = \{2.6C, 3.151C, 5C\}$,应力水平数 $K^1 = 3$,样本量 $n_i^1 = 3 (i = 1, 2, 3)$,试验监测间隔为 2 个循环,在各加速应力下监测次数分别为 $m_{1j}^1 = 100$ 、 $m_{2j}^1 = 67$ 和 $m_{3j}^1 = 33 (j = 1, 2, 3)$,实测数据如图 35 所示。



图 33 锂离子电池电应力加速试验平台

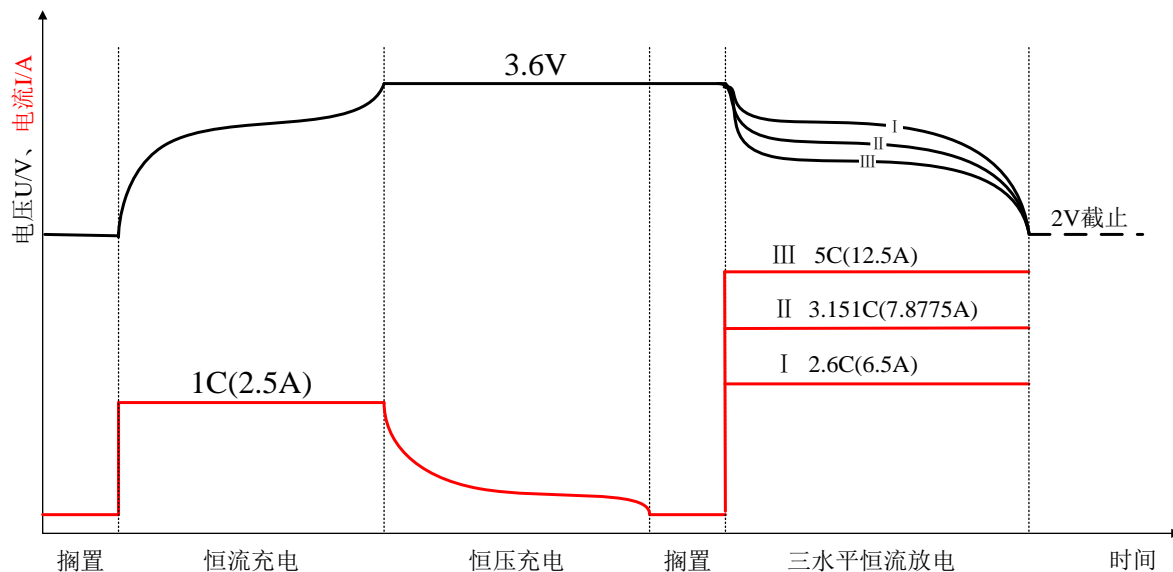


图 34 锂电池三电应力加速退化试验剖面图（步进应力）

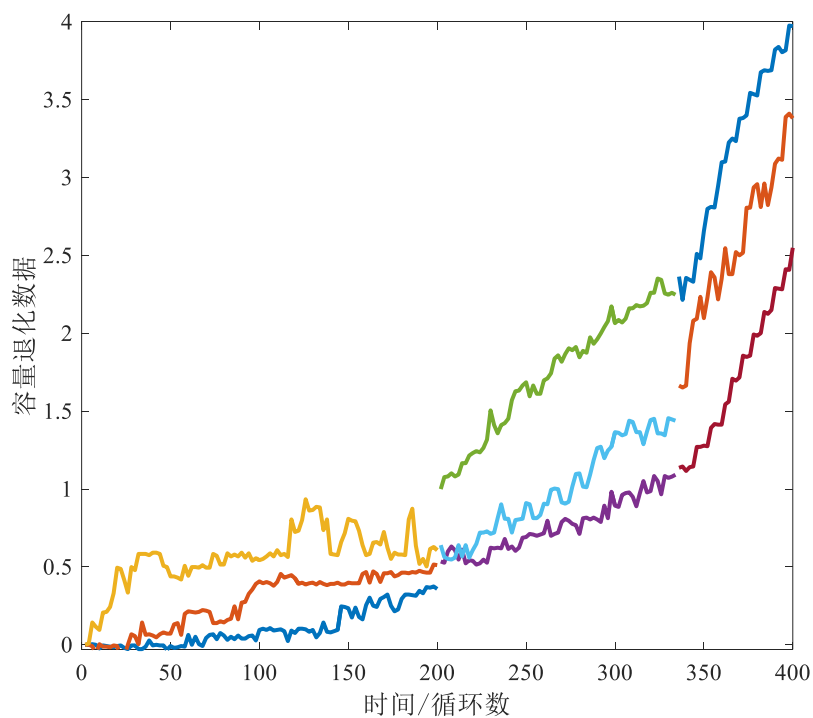


图 35 锂离子电池步进应力加速退化试验数据，加速应力：放电速率

之后，针对该类电池又开展了放电倍率-温度双应力下的恒定应力加速退化试验，试验设备如图 36 所示，应力剖面如图 37 所示。



图 36 锂离子电池温度应力加速试验设备

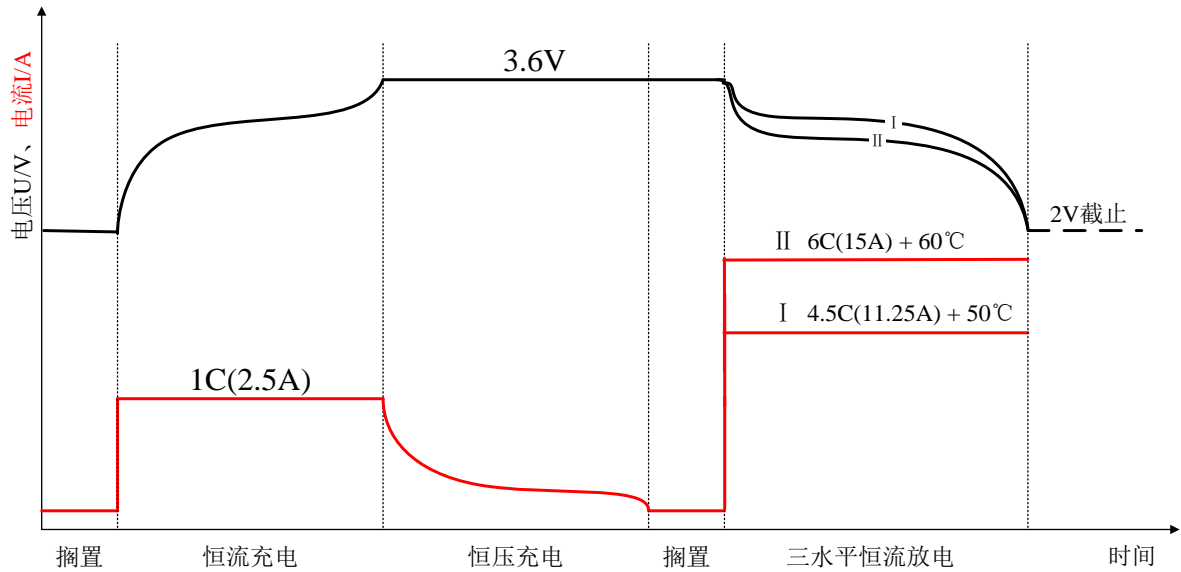


图 37 锂离子电池恒定应力加速退化试验剖面，加速应力：放电倍率和温度

试验参数如下：应力类型 $S_2 = \{\text{放电倍率、温度}\} = \{4.5C - 50^\circ\text{C}, 6C - 60^\circ\text{C}\}$ ，应力水平数 $K^2 = 2$ ，样本量 $n_i^2 = 3 (i = 1, 2, 3)$ ，试验监测间隔为 1 个循环，在各加速应力下监测次数分别为 $m_{1j}^2 = 200$ 和 $m_{2j}^2 = 150 (j = 1, 2, 3)$ ，实测数据如图 38 所示。

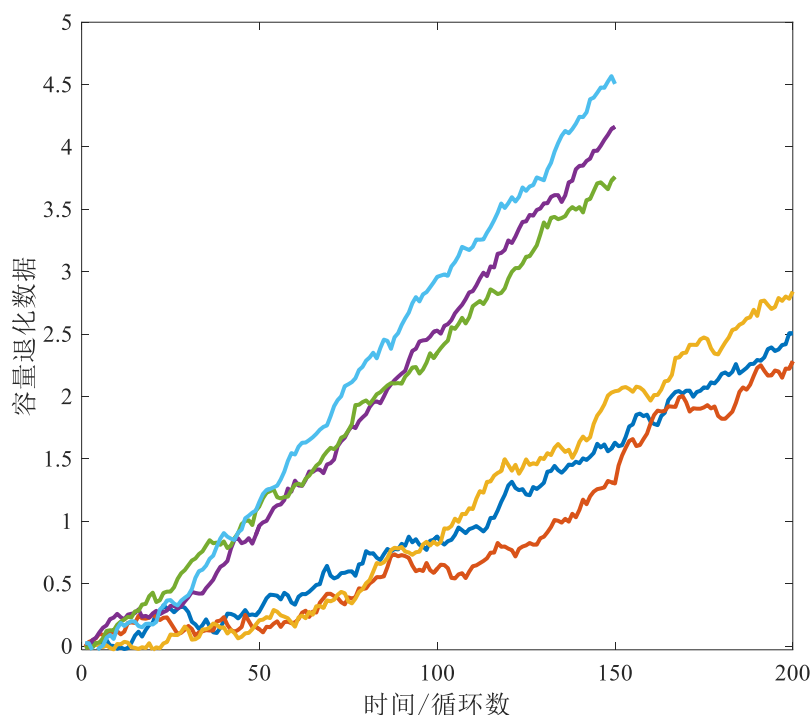


图 38 锂离子电池恒定应力加速退化试验数据，加速应力：放电倍率和温度

6.4.2 参数评估

根据 6.2.2 节分析可知： $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ ，因而该类融合问题属于不独立非完备 ADT 数据集融合评估问题，通常选取温度应力下的阿伦尼乌斯模型 ($\varphi(s) = 1/s$) 和电应力下的艾林模型 ($\varphi(s) = Ins$)。

融合评估流程如下：

- 1) 构造应力类型全集 $S = \{S_1 = \{\text{放电倍率}\}, S_2 = \{\text{放电倍率、温度}\}\}$;
- 2) 由于 $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ ，则重新定义全集 S ;
- 3) 基于全集 S 构造 2 个互斥应力集合，即 $S' = \{S'_1 = \{\text{放电倍率}\}, S'_2 = \{\text{温度}\}\}$ 且 $S'_1 \cap S'_2 = \emptyset$ ，分配相应的发生概率为 $p' = \{p'_1, p'_2\}$ ，且 $p'_1 + p'_2 = 1$;
- 4) 原始数据集的应力集合 S_1 和 S_2 发生概率可表示为： $p_1 = Pr\{S_1\} = p'_1$ ， $p_2 = Pr\{S_2\} = p'_1 + p'_2 = 1$;
- 5) 构造加权融合模型如下：

$$\begin{cases} X_1(t) \sim N(p_1\mu^1\Lambda(t), \sigma^2\Lambda(t)) \\ X_2(t) \sim N(p_2\mu^2\Lambda(t), \sigma^2\Lambda(t)) \end{cases} \quad (6.15)$$

$$\downarrow$$

$$X(t) \sim N((p_1\mu^1 + p_2\mu^2)\Lambda(t)/(p_1 + p_2), \sigma^2\Lambda(t))$$

根据极大似然估计方法给出参数的评估结果，如表 21 所示。

表 21 锂离子电池案例的参数估计结果

参数	A	B_l		σ	γ	p'_1 /放电倍率	p'_2 /温度
		$B_1^1 = B_1^2$	B_2^2				
Θ_{est}	-7.8581	2.7622	-690.5759	0.0181	1.2782	0.1134	0.8866

由表 21 可知， $p'_1 < p'_2$ ，进而能够得到结论：温度对于锂离子电池性能退化的贡献程度高于放电倍率。

6.4.3 可靠性评估与分析

根据锂离子电池的实际退化和失效信息，定义其容量衰退至电池初始容量的 70% 为失效，因此失效阈值 $\omega = 30$ 。将表 21 的参数评估结果代入式(6.10)，可得锂离子电池在正常应力（1C - 25°C）下的可靠度曲线，如图 39 所示。

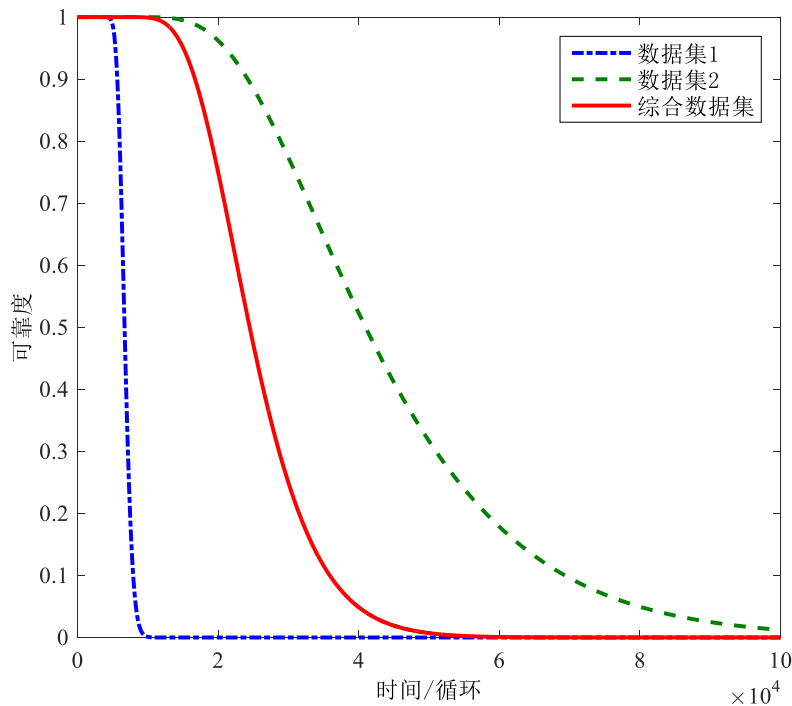


图 39 锂离子电池可靠度综合评估结果 VS 单一数据集评估结果

由图 39 所示,可靠度综合评估结果结合了两个 ADT 数据集的贡献。假设关注可靠度为 0.9 的锂离子电池寿命,综合评估寿命为 16,714 循环,而单一数据集 1 和 2 的评估结果分别为 5,657 和 24,212 循环,可见二者评估结果差异较大,综合评估结果能够合理地融合二者的差异性。

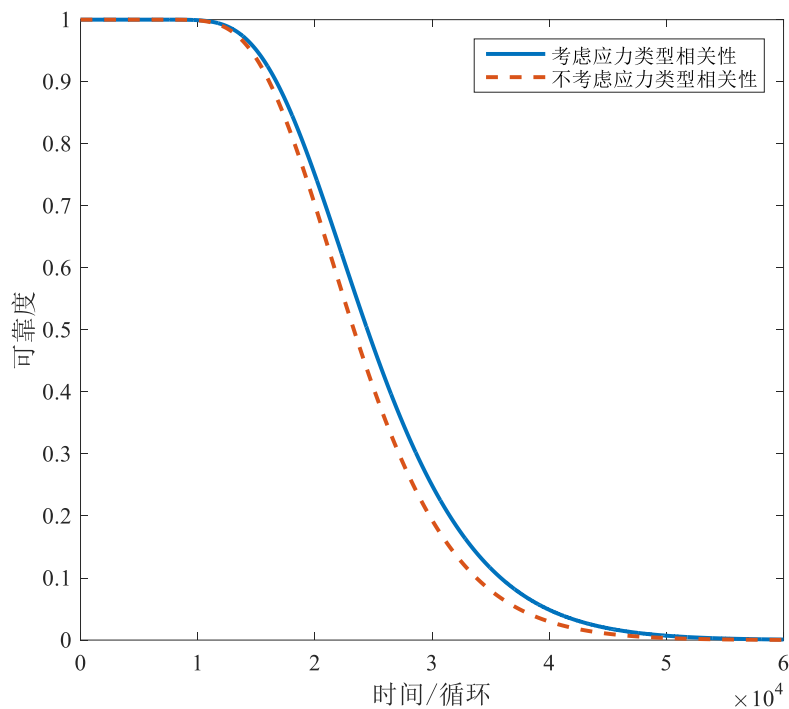


图 40 是否考虑应力集合相关性的锂离子电池可靠度评估结果

此外,图 40 给出了是否考虑两个数据集存在应力类型相关性的可靠度评估结果,可知不考虑相关性的可靠性评估结果趋于保守。以可靠度 0.9 为例,其结果为 16108 循环,比本章所提方法评估结果少 606 个循环。因此,本章所提方法能够很好地量化非完备 ADT 数据集之间存在加速应力类型的不确定性,从而给出合理的寿命与可靠性评估结果。

6.5 本章小结

本章考虑产品在寿命周期各阶段存在寿命信息的情况,主要研究多源非完备 ADT 数据集的融合评估方法,基于互斥集合理论对各 ADT 数据集分配发生概率,从而直接表征应力类型对产品总体信息的贡献程度,从而很好地量化应力类型带来的认知不确定性,最终给出合理可信的寿命与可靠性评估结果。此外,本章方法适用于同母体(或称相似产品)的数据集融合,未来研究可以扩展到不同母体信息融合,可参见[199]。

第七章 结合 ADT 信息的剩余寿命预测方法

一般来说, 通过内场 ADT 能够获得产品的总体特征信息, 而在外场实际使用时主要关注目标产品的个体特征, 如何量化二者的差异性且实现准确地外场寿命预测是本章研究的主要内容, 为此提出结合 ADT 信息的剩余寿命预测方法。

7.1 问题描述

对于新研高可靠长寿命产品, 外场短时间内很难获取足够的性能退化数据来表征产品个体特征, 用于开展准确的寿命预测工作。然而在产品研制后期, 加速退化试验通过施加严酷的应力条件在有限时间内获得足够的退化数据, 容易给出了产品总体特征信息。

为了实现外场寿命与可靠性的准确预测, 一些学者研究了加速试验信息与外场使用信息相融合的评估方法^[203]。例如, Liao 和 Elsayed[128]基于线性维纳过程模型对内场 CSADT 退化数据进行建模, 在外推产品静态可靠度时考虑外场应力的波动性, 将其看作随机变量, 结果表明考虑该波动性的可靠度结果要偏于保守。基于线性维纳过程, Wang 等人[130]分别在漂移系数和扩散系数引入两个修正因子, 来校对 ADT 数据和外场数据的区别, 在贝叶斯框架下开展内外场数据的融合评估。此外, 王立志[199]进一步提出了多阶段、多产品层次和多性能参数下的退化数据融合评估方法。

然而现有方法在量化内外场特征差异性方面, 未能对内场样本总体存在的样本间差异性、外场环境载荷的不确定性及个体的特殊性进行全面的量化表征, 从而在实时寿命预测方面存在一定的局限性。

7.2 建模方法

7.2.1 集成寿命预测框架

本节介绍基于 ADT 信息的外场寿命预测框架及不确定性量化方法, 并详细给出线性和非线性场景下的建模过程和剩余使用寿命分布。

在图 41 所示框架中, 首先基于先验 ADT 信息给出产品总体特征描述, 即辨识加速模型及加速状态下退化模型的参数, 并分别考虑了样本间差异性和退化的瞬时不确定性; 然后, 将外推至正常应力下的退化模型作为外场寿命预测的初始模型, 并在新监测数据获取时加以更新, 同时基于状态转移模型来表征环境载荷的动态不确定性; 最后基于贝

叶斯理论不断更新修正后的模型，降低总体特征不确定性的同时，使其接近于外场个体特征，从而开展外场剩余寿命预测。

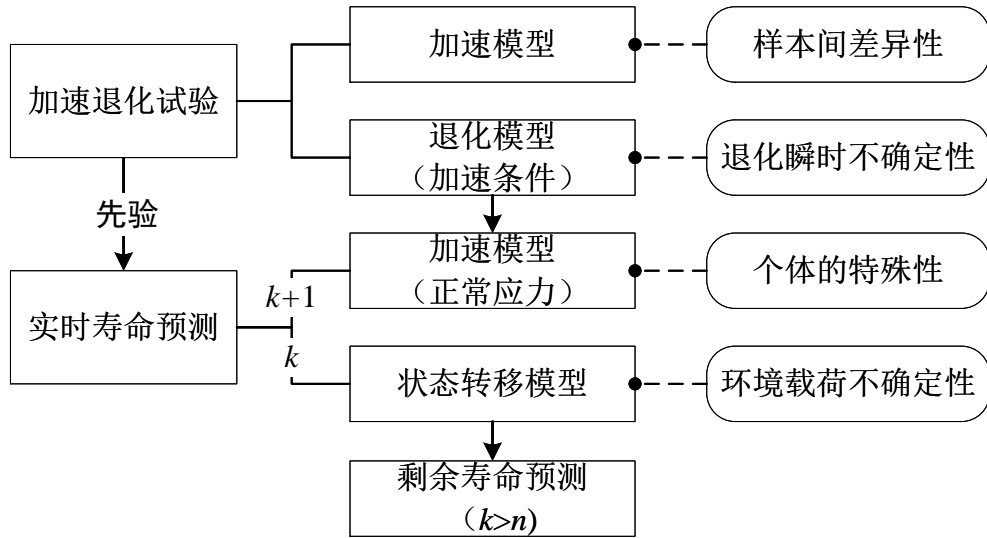


图 41 基于 ADT 和外场数据的剩余寿命预测框架

7.2.1.1 加速和退化模型

随机过程模型具有良好的物理和统计特性，因此广泛应用于退化过程建模，表征产品性能参数 $X(t)$ 随时间的变化。本章选择与 2.2.1 节相同的退化模型：

$$X(t) = x_0 + \mu\Lambda(t) + \sigma B(\Lambda(t)) \quad (7.1)$$

式中， x_0 是退化初值， $\mu > 0$ 是漂移系数， σ 是扩散系数， $B(\cdot)$ 是标准布朗运动模型， $\Lambda(t)$ 是时间变换的非减函数。当 $\Lambda(t) = t$ 时，式(7.1)为线性模型；当 $\Lambda(t) = t^\gamma (\gamma > 0 \& \neq 1)$ 时为非线性模型。

当采用模型(7.1)开展 ADT 分析时，通常需要给出如下假设^[80, 130, 134]：

假设：

- 1) 在加速试验中应力条件保持较为稳定；
- 2) 扩散系数表征样本间差异性和因操作和环境条件引起的变异性，假设为常数；
- 3) 漂移系数表征退化路径的方式，假设与加速应力之间存在关系，即加速模型。

在加速模型中，对数线性关系是一种广义形式，如温度应力 T 下的阿伦尼乌斯模型、电应力 I 下的艾林模型等，即

$$\ln \mu = A + \sum_i B_i \varphi(s_i) \quad (7.2)$$

式中， A 和 B_i 是常参数， $\varphi(s)$ 表示加速应力 s 的函数。

7.2.1.2 寿命与可靠度评估

在常规 ADT 分析中, 随机过程常用于表示受试样品在不同应力条件下的退化过程, 如式(7.1)。然后, 基于加速模型(7.2)将漂移系数外推至正常应力 s_0 , 即 μ_0 。从而, 产品在正常应力下的可靠度能够基于退化过程的随机特性给出。具体来说, 式(7.1)首次穿越失效阈值 ω ($\omega' = \omega - x_0$) 的时间服从逆高斯分布^[135], 从而首穿时的概率密度函数和产品可靠度函数分别为

$$f(t|\omega', \sigma, \mu_0) = \frac{\omega'}{\sqrt{2\pi\sigma^2[\Lambda(t)]^3}} \exp\left\{-\frac{[\omega' - \mu_0\Lambda(t)]^2}{2\sigma^2\Lambda(t)}\right\} \frac{d\Lambda(t)}{dt} \quad (7.3)$$

$$R(t|\omega', \sigma, \mu_0) = \Phi\left(\frac{\omega' - \mu_0\Lambda(t)}{\sigma\sqrt{\Lambda(t)}}\right) - \exp\left(\frac{2\mu_0\omega'}{\sigma^2}\right) \Phi\left(-\frac{\omega' + \mu_0\Lambda(t)}{\sigma\sqrt{\Lambda(t)}}\right) \quad (7.4)$$

可靠寿命为

$$t_R = \Lambda^{-1}\left[R^{-1}(\omega', \sigma, \mu_0)\Big|_{R=R_d}\right] \quad (7.5)$$

式中, R_d 是定义的可靠度水平, t_R 是对应的可靠寿命, Λ^{-1} 是时间变换的反函数。

7.2.1.3 关于样本间差异性表征的思考

考虑到加速退化试验中通常有几个受试样品, 每个样品由于制造和(或)环境条件不同存在各自的退化特征, 因此样本间差异性应该从式(7.1)分离出来, 故做如下假设修正 2) 和 3):

假设:

- 4) 扩散系数表征受试样品的随机特性, 假设为常数;
- 5) 漂移系数表征样本间由于制造和(或)环境条件引起的差异性, 假设为随机变量。

那么, 在原有加速模型(7.2)的基础上, 增加一个随机噪声项表征样本间差异性。

$$\ln \mu = A + \sum_l B_l \varphi(s_l) + \eta \quad (7.6)$$

式中, $\eta \sim N(0, \sigma_1^2)$ 。则漂移系数服从对数正态分布而非简单正态分布, 即正常使用条件下 $\mu_0 \sim \text{LogN}(A + \sum_l B_l \varphi(s_{l0}), \sigma_1^2)$ 。

从而, 依赖于 μ_0 的首穿时边缘概率密度函数和可靠度函数分别为

$$f^{new}(t|\omega', \sigma) = \int f(t|\omega', \sigma, \mu_0) f(\mu_0) d\mu_0 \quad (7.7)$$

$$R^{new}(t|\omega', \sigma) = 1 - \int_0^{\Lambda(t)} f^{new}(u|\omega', \sigma) du \quad (7.8)$$

同时, 可靠寿命为

$$t_R^{new} = \Lambda^{-1} \left[R^{new-1}(\omega', \sigma) \Big|_{R=R_d} \right] \quad (7.9)$$

这里, 将式(7.1)和(7.6)称为用于 ADT 分析的修正维纳过程(Modified Wiener Process, MWP)模型, 该模型能够分别在退化模型和加速模型中表征退化的瞬时不确定性和样本间差异性, 表征产品总体特性信息, 该模型能够作为外场剩余寿命预测的先验模型。

7.2.2 外场使用条件下的在线寿命预测

假设:

- 6) 产品在外场使用条件下未发生新的失效机理;
- 7) 产品的退化特征不变, 因而正常条件下的瞬时不确定性与加速试验中的保持一致。

本章考虑产品在外场经受严酷或者柔和但非破坏性的使用环境, 因而假设 6) 是满足的。而对于假设 7), 产品特性的一致性意味着其缓慢退化特征是类似的。因此, 外场实际使用的退化过程与式(7.1)相同。

为不失一般性, 外场应力的不确定性通过时间相关的退化状态 μ 来表征, 该退化状态是应力相关的变量, 如加速模型(7.2)和(7.6)。因而, k 时刻的状态转移模型可简化为

$$\mu_k = \mu_{k-1} + \delta_{k-1} \quad (7.10)$$

式中, δ_{k-1} 表示 $k-1$ 时刻外场应力对退化状态的动态影响, 假设是统计独立的正态分布, 均值和标准差分别为 0 和 σ_2 。退化状态的初始值可将外场应力 s_0 代入式(7.6)给出。

定义 k 时刻产品外场退化历史为 $X_{0:k}$, 即 $X_{0:k} = [X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_k)]'$ 。根据式(7.1)和假设 7), 外场测量模型为

$$x(t_k) = x(t_{k-1}) + \mu_{k-1} \Delta t_k + \sigma \varepsilon_k \quad (7.11)$$

式中, $\Delta t_k = \Lambda(t_k) - \Lambda(t_{k-1})$, $\varepsilon_k \sim N(0, \Delta t_k)$ 。

因此, 式(7.10)和(7.11)构成了产品外场使用的基本预测模型, 其表征产品在实际使用中的个体特性, 在先验模型的基础上, 随外场观测数据的增加而不断修正。其中, 漂移系数 μ 可看做隐变量, 基于外场监测历史数据来估计得到。当新的退化数据可获取时, 状态转移和测量模型都能够实时更新, 用于剩余寿命预测。

定义 k 时刻的剩余寿命为 L_k , 满足

$$L_k = \inf \{l_k > 0 | x(t_k + l_k) \geq \omega, x(t_k) < \omega\} \quad (7.12)$$

在实际外场使用时，产品的退化过程可能受冲击性跳变影响而短暂偏离原始退化过程，由于强跟踪滤波算法具有较强鲁棒性、弱敏感性等优点，本章采用该算法更新隐变量，算法流程如下：

算法 1: 强跟踪滤波算法

Step 1: 设定初值

$$\hat{\mu}_0 = E(\mu_0) = e^{(A + \sum_l B_l \varphi(s_{l0}) + \sigma_1^2/2)}, P_{0|0} = \text{Var}(\mu_0) = (e^{\sigma_1^2} - 1) e^{2(A + \sum_l B_l \varphi(s_{l0})) + \sigma_1^2}, \alpha, \rho$$

Step 2: 根据正交原理计算衰减因子 $r(t_k)$

$$\begin{aligned} B(t_k) &= V_0(t_k) - \sigma_2^2 \Delta t_k^2 - \alpha \sigma^2 \Delta t_k \\ V_0(t_k) &= \begin{cases} v^2(t_k) & k = 1 \\ \frac{\rho V_0(t_{k-1}) + v^2(t_k)}{1 + \rho} & k > 1 \end{cases} \\ v(t_k) &= x(t_k) - x(t_{k-1}) - \hat{\mu}_{k-1} \Delta t_k \\ C(t_k) &= P_{k-1|k-1} \Delta t_k^2 \\ r(t_k) &= \max \{1, B(t_k)/C(t_k)\} \end{aligned}$$

Step 3: 隐状态估计

$$\begin{aligned} P_{k|k-1} &= r(t_k) P_{k-1|k-1} + \sigma_2^2 \\ Q_k &= \Delta t_k^2 P_{k|k-1} + \sigma^2 \Delta t_k \\ \hat{\mu}_k &= \hat{\mu}_{k-1} + P_{k|k-1} \Delta t_k Q_k^{-1} v(t_k) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Step 4: 更新隐状态方差

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - P_{k|k-1} \Delta t_k^2 Q_k^{-1} P_{k|k-1} \quad (7.14)$$

在算法 1 中，弱化因子 $\alpha \geq 1$ 和遗忘因子 ρ 通常根据启发式搜索得到，这里设定 $\rho = 0.95$ ^[204]。根据式(7.13)和(7.14)可得，关于隐变量 μ_k 的概率密度函数为

$$f(\mu_k | X_{0:k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P_{k|k}}} \exp\left(-\frac{(\mu_k - \hat{\mu}_k)^2}{2P_{k|k}}\right) \quad (7.15)$$

式中， $\hat{\mu}_k$ 和 $P_{k|k}$ 分别表示 k 时刻变量 μ 的均值和方差。

7.2.2.1 线性场景下的剩余寿命分布

针对 $\Lambda(t) = t$ 时的简单线性场景,退化过程(7.1)的首穿时服从逆高斯分布,见式(7.3)。在 k 时刻,依赖于 $X_{0:k}$ 和 μ_k 的产品剩余寿命分布为

$$f(l_k | X_{0:k}, \mu_k) = \frac{\omega - x(t_k)}{\sqrt{2\pi(l_k)^3 \sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(\omega - x(t_k) - \mu_k l_k)^2}{2\sigma^2 l_k}\right) \quad (7.16)$$

式中,状态变量 μ_k 是不可观测的,需要根据到当前 k 时刻的历史退化数据来递归求解。

考虑到外场应力的不确定性,剩余寿命分布应当由式(7.15)和(7.16)根据全概率法则给出^[205]:

$$f(l_k | X_{0:k}) = \int f(l_k | X_{0:k}, \mu_k) f(\mu_k | X_{0:k}) d\mu_k \quad (7.17)$$

即

$$f(l_k | X_{0:k}) = \frac{\omega - x(t_k)}{\sqrt{2\pi(l_k)^3 (\sigma^2 + P_{k|k} l_k)}} \cdot \exp\left(-\frac{(\omega - x(t_k) - \hat{\mu}_k l_k)^2}{2(\sigma^2 + P_{k|k} l_k) l_k}\right) \quad (7.18)$$

7.2.2.2 非线性场景下的剩余寿命分布

针对非线性场景,关于首穿时(7.12)的分布解析形式很难给出,只有在某些温和的假设下^[178, 206],其形式可表示为

$$f(l_k | X_{0:k}) = \frac{\gamma(t_k + l_k)^{\gamma-1} (\omega - x(t_k))}{\Delta\Lambda(t_k + l_k) \sqrt{2\pi U_k}} \cdot \exp\left(-\frac{(\omega - x(t_k) - \hat{\mu}_k \Delta\Lambda(t_k + l_k))^2}{2U_k}\right) \quad (7.19)$$

式中, $\Delta\Lambda(t_k + l_k) = (t_k + l_k)^\gamma - t_k^\gamma$, $U_k = \Delta\Lambda(t_k + l_k)^2 P_{k|k} + \sigma^2 \Delta\Lambda(t_k + l_k)$ 。

显然,式(7.18)是式(7.19)在 $\gamma = 1$ 时的特例。

7.2.3 参数估计

本节主要结果未知参数的估计问题,即 $\Theta = \{A, B_l, \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \gamma\}$ 。从前述可知,参数 $\{A, B_l, \sigma, \sigma_1, \gamma\}$ 是与加速退化试验数据有关,描述产品总体信息;而 σ_2 是与外场使用的目标产品有关。因此,可将参数集 Θ 分为两部分: $\Theta_1 = \{A, B_l, \sigma, \sigma_1, \gamma\}$ 和 $\Theta_2 = \{\sigma_2\}$ 分开估计。

7.2.3.1 估计参数 Θ_1

对于 ADT 数据,由式(7.1)和(7.6)易得

$$\Delta x_{ijk} \sim N\left(\mu_{ij}\Delta t_{ijk}, \sigma^2\Delta t_{ijk}\right) \quad (7.20)$$

$$\ln \mu_{ij} \sim N\left(A + \sum_l B_l \varphi(s_{li}), \sigma_1^2\right) \quad (7.21)$$

式中, x_{ijk} 表示第 i 个加速应力水平下第 j 个样本在第 k 监测点的退化数据, $i=1,2,\dots,K$; $j=1,2,\dots,n_i$; $k=1,2,\dots,m_j$, $\Delta x_{ijk}=x_{ijk}-x_{ij(k-1)}$, $\Delta t_{ijk}=\Lambda(t_{ijk})-\Lambda(t_{ij(k-1)})$ 。因此, 基于 ADT 数据的参数 Θ_1 联合似然函数为

$$\begin{aligned} L(X|\Theta_1) &= p(\Delta x_{ijk}|\mu_{ij}, \sigma, \gamma) p(\mu_{ij}|A, B_l, \sigma_1) \\ &= \prod_i \prod_j \left[\prod_k f(\Delta x_{ijk}|\mu_{ij}, \sigma, \gamma) f(\mu_{ij}|A, B_l, \sigma_1) \right] \end{aligned} \quad (7.22)$$

参数后验分布为

$$\pi(\Theta_1|X) = L(X|\Theta_1)\pi_0(\Theta_1) \quad (7.23)$$

式中, $\pi_0(\Theta_1) = \pi_0(A, B_l, \sigma, \sigma_1, \gamma)$ 表示未知参数的联合先验分布。

根据式(7.20)-(7.23), 很难给出未知参数 Θ_1 的解析解, 但可以看出, 参数之间的关系类似于贝叶斯分析中的分层模型, 因而可以基于 MCMC 和先进抽样方法来获取参数的后验概率密度分布, 将后验均值看作参数的估计值。然后, 根据式(7.8)、(7.10)和(7.11)即可得到可靠度评估结果及外场预测的先验信息。

本章基于 WinBUGS 软件中的 Gibbs 抽样方法来估计未知参数^[195]。假设参数先验是无信息并相互独立的, 服从

$$\begin{aligned} A &\sim N(\kappa_A, \varepsilon_A^2), \quad B_l \sim N(\kappa_{B_l}, \varepsilon_{B_l}^2) \\ \sigma &\sim IGa(a, b), \quad \sigma_1 \sim IGa(a_1, b_1) \end{aligned}$$

和

$$\gamma \sim N(\kappa_\gamma, \varepsilon_\gamma^2)$$

7.2.3.2 估计参数 Θ_2

参数 Θ_2 表征外场应力对目标产品状态的影响, 即参数 σ_2 , 能够根据退化历史数据 $X_{0:k}$ 来估计得到。由式(7.10)和(7.11)可知

$$\mu_k \sim N(\mu_{k-1}, \sigma_2^2) \quad (7.24)$$

$$\Delta x(t_k) \sim N(\mu_{k-1}\Delta t_k, \sigma^2\Delta t_k) \quad (7.25)$$

可以看出, 上述模型形式与参数 Θ_1 的估计类似, 构成了一个能够随时间更新的分层

模型，同样可基于 MCMC 方法来估计参数 σ_2 。类似的估计流程参见 Wang 等人[178]。

7.3 仿真案例分析

本节将分别基于仿真案例来描述所提方法在线性和非线性退化场景下的适用性，并验证 ADT 数据用于外场剩余寿命预测的可行性。通过对预测结果分析，对所提方法进行阐述。同时为了对比常规和新的 ADT 评估结果，即式(7.4)和(7.8)，定义不考虑样本间差异的情况为案例一 (case 1)，考虑样本间差异的为案例二 (case 2)。

7.3.1 线性退化场景仿真

基于式(7.1)进行线性场景 $\Lambda(t) = t$ 下的数据仿真，参数值见表 22，仿真 SSADT 和外场数据见图 42(a)和(b)。

表 22 SSADT 仿真参数设置

条件	内容						值
加速状态	应力($T/^{\circ}\text{C}$)						60, 80, 100
	每个应力水平监测次数						50, 30, 20
	监测间隔(Hours)						5
	样本量						6
	加速模型						$\varphi(s)=1/(273.15+T)$
正常状态	应力($T/^{\circ}\text{C}$)						25
	监测次数						17
	监测间隔(Hours)						1000
	样本量						2
模型参数	y_0	ω	A	B	σ	σ_1	σ_2
	$N(0,0.25)$	25	12	-5500	0.01	0.5	0.0001

7.3.1.1 ADT 参数估计

根据 7.2.3.1 节流程，对 ADT 未知参数集 $\Theta_1 = \{A, B, \sigma, \sigma_1\}$ 进行估计，并采用 Gelman-Rubin 指标来检验马尔科夫链的收敛性，即该指标近似等于 1 的程度^[207]。设置总迭代数为 200,000，前 50,000 个结果视为老化阶段进行丢弃，从而保证两条抽样链能够收敛。图 43(a)和(b)分别给出了 ADT 待估参数的后验概率密度函数和 Gelman-Rubin 指标，可以看出参数链全部收敛。表 23 给出了参数估计结果及 95%的置信区间，并采用下式计算对应的相对误差

$$Error = \left| \frac{Par_{est} - Par_{real}}{Par_{real}} \right| \times 100 \quad (7.26)$$

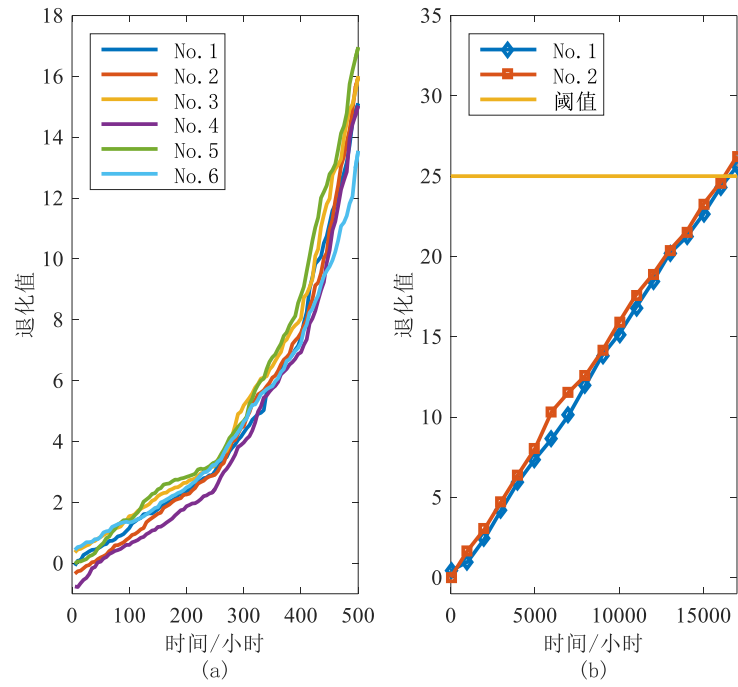


图 42 线性场景下的(a) 六样本 SSADT 数据和(b) 两样本外场数据

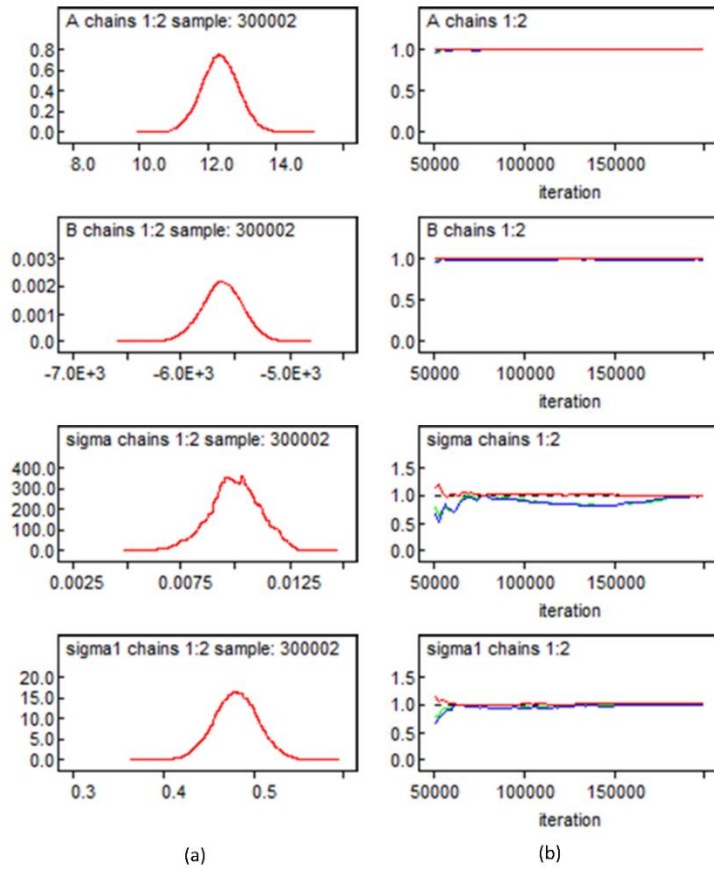


图 43 (a) SSADT 参数后验概率密度函数和 (b) 收敛性检验

表 23 考虑样本间差异的参数估计结果及相对误差

参数	均值(Par_{est})	标准差	2.5%	97.5%	误差(%)
A	12.3617	0.5340	11.32	13.41	3.01
B	-5621.9	186.8	-5990.0	-5256.0	2.22
σ	0.0097	0.0011	0.007768	0.01223	3.32
σ_1	0.4808	0.0243	0.4319	0.5274	3.84

如表 23 所示, 本章所提的参数估计方法能够得到较为准确的估计结果, 从而为外场剩余寿命预测提供可靠的先验信息。同时, 表 24 给出了不考虑样本间差异的参数估计结果。可以看出, 两种案例下的加速模型(7.2)和(7.6)参数较为相近, 且相对误差小于 3%。然而, 对于参数 σ , Case1 的值远大于真值, 其原因在于该值不能表征退化过程的随机特性还表征样本间的差异性, 而 Case2 能够将二者区分开来。

表 24 不考虑样本间差异的参数估计结果及相对误差

参数	均值(Par_{est})	标准差	2.5%	97.5%	误差(%)
A	12.16	0.6763	11.03	13.47	1.34
B	-5549.4	239.9	-6016.0	-5150.0	0.90
σ	0.0211	0.0013	0.01866	0.0237	110.86

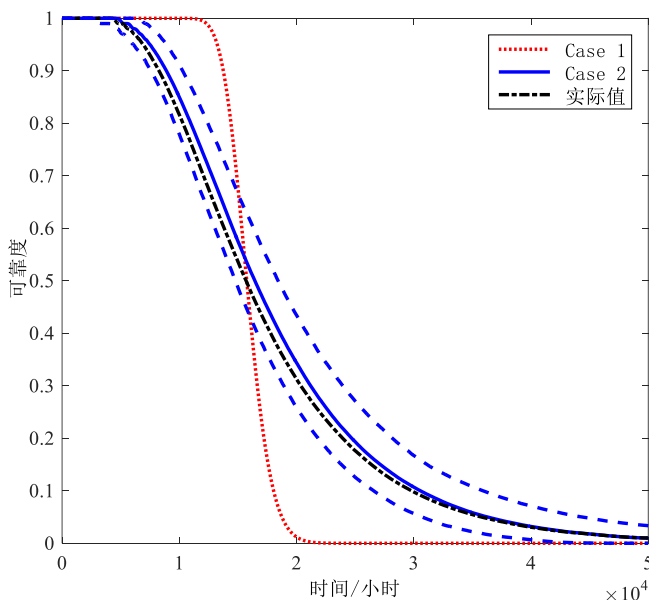


图 44 线性场景下两个案例对应的可靠度曲线及实际曲线

对于评估结果, 图 44 给出了两个案例的可靠度曲线, 能够直观看出两种建模结果的区别。Case2 将退化过程中存在的不确定性分别在漂移系数和扩散系数中表征, 从而

其可靠度曲线比 Case1 平稳, 且更接近于实际值。在实际应用时, 可能需要给出置信区间来表征参数的不确定性, 因此基于 Bootstrap 方法输出 Case2 的 95% 置信区间, 如图 44 所示, 该区间能够覆盖实际可靠度曲线。

若使用者关注可靠度为 0.9 的寿命, 则分别根据式(7.5)和(7.9)可得, 可靠寿命分别为 8900 小时 ([7600, 10300]小时)和 13754 小时, 而真值为 8400 小时。因此, 在 ADT 分析和可靠度评估中需要特别关注样本间差异性的影响。

7.3.1.2 外场使用的寿命预测

在实际外场使用中, 目标产品的剩余寿命对于维护方案的制定具有重要影响。图 42(b)给出了两个仿真退化路径, 各 16 个退化监测值, 且退化路径都超过了失效阈值。因此, 该仿真数据能够作为全寿命周期的退化数据来验证预测结果的正确性。

依赖于 7.3.1.1 节 ADT 参数估计结果, 作为外场预测模型(7.10)和(7.11)的先验信息, 故模型初始值可设定为 $\hat{\mu}_0 = 0.001697$, $P_{0|0} = 7.4906e-07$, $\sigma = 0.0097$ 。在每个监测点, 根据算法 1 和式(7.18)随时间更新隐变量, 并输出剩余寿命的概率密度函数, 如图 45 所示。直观来说, 随着退化数据的增加, 寿命预测结果越来越准确。

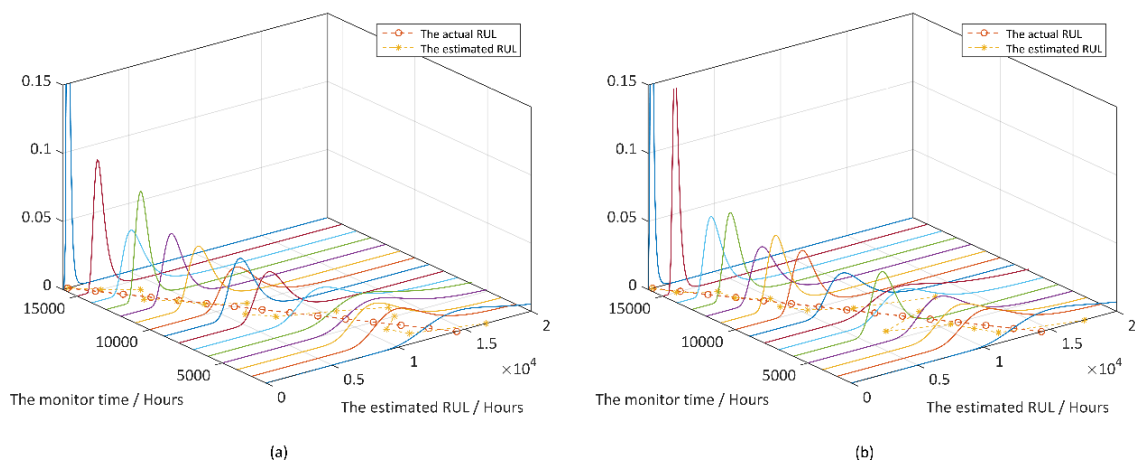


图 45 (a) 样本 1 和 (b) 样本 2 剩余寿命的概率密度函数 (从第二个监测点到失效前时刻)

此外, 图 46 给出了预测退化路径与实际路径的相对误差, 表明除初始点外 (受初值影响) 预测路径与实际值较为接近, 因而 ADT 分析结果能够提供外场寿命预测的先验信息及线性退化路径建模。

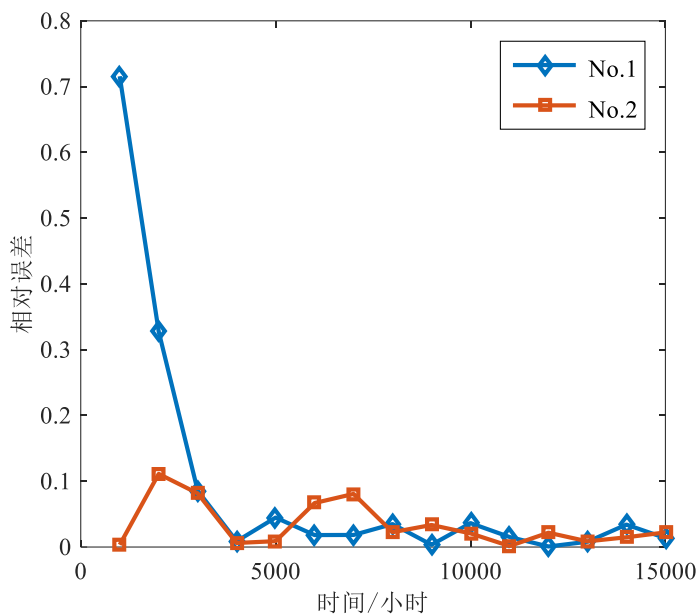


图 46 线性场景下外场预测路径和实际路径的相对误差

7.3.2 非线性退化场景仿真

非线性场景下的退化仿真与线性场景类似，选取形如 $\Lambda(t) = t^\gamma$ 的时间尺度变换模型 [103, 178, 206]，参数设置见表 25，仿真 CSADT 和外场数据见图 47(a)和(b)。

表 25 CSADT 仿真参数设置

条件	内容						值
加速状态	应力($T/^\circ\text{C}$)						50, 65, 75
	每个应力水平监测次数						100
	监测间隔(Hours)						5
	样本量						12 (4 个样本/应力水平)
	加速模型						$\varphi(s)=1/(273.15+T)$
非线性系数	γ						1.5
正常状态	应力($T/^\circ\text{C}$)						25
	监测次数						13
	监测间隔(Hours)						300
	样本量						2
模型参数	y_0	ω	A	B	σ	σ_1	σ_2
	$N(0,0.25)$	25	11	-6000	0.01	0.5	0.0001

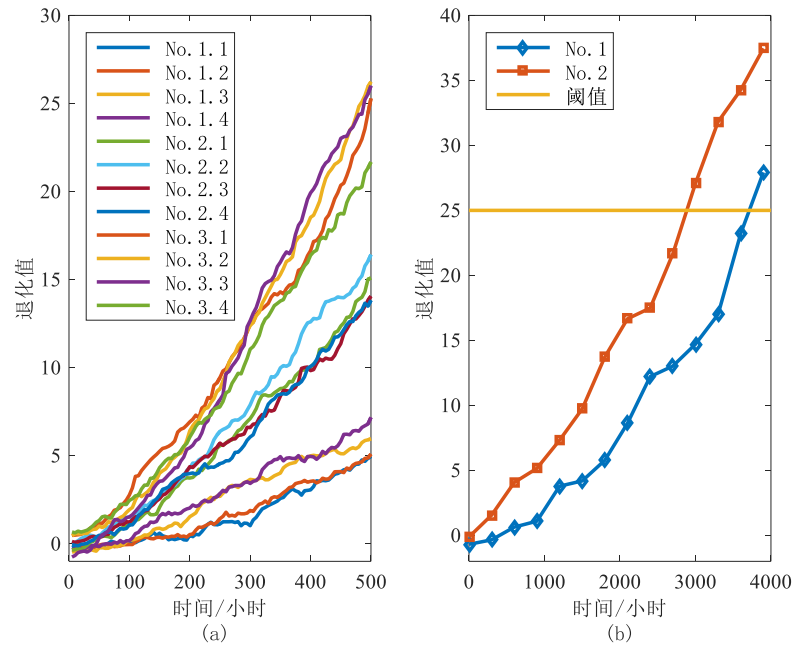


图 47 非线性场景下的(a) 十二个样本 CSADT 数据和(b) 两样本外场数据

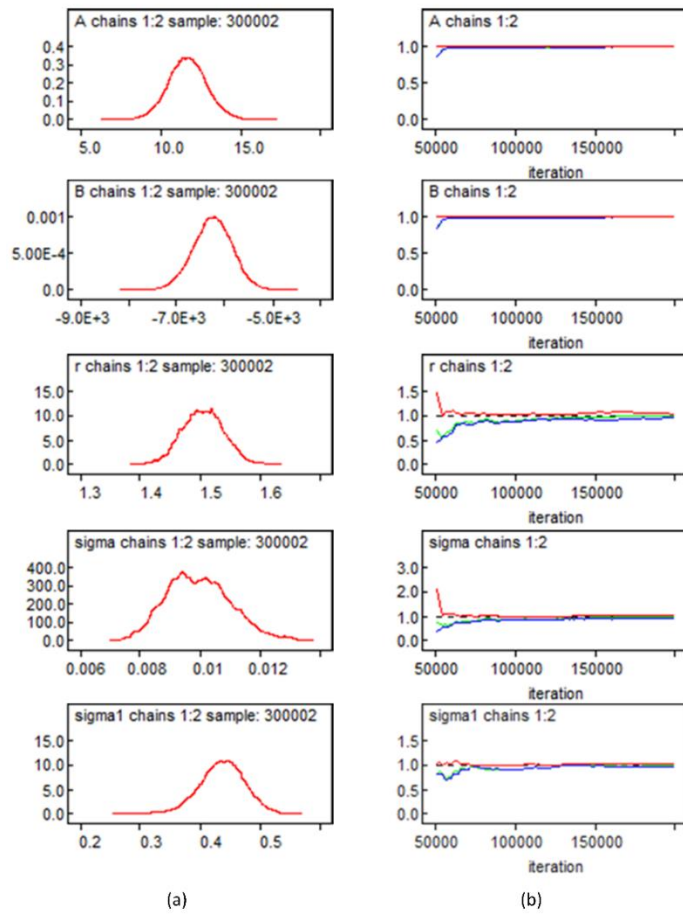


图 48 (a) CSADT 参数后验概率密度函数和 (b) 收敛性检验

7.3.2.1 ADT 参数估计

根据 7.2.3.1 节流程, 给出两种案例下 ADT 模型参数的估计结果, 即 $\theta_1 = \{A, B, \sigma, \sigma_1, \gamma\}$ 。同样设置 200,000 次循环, 前 50,000 个样本视为老化阶段, 进行抽样马尔科夫链的收敛性检验, 如图 48 所示。

表 26 考虑样本间差异的参数估计结果及相对误差

参数	均值(Par_{est})	标准差	2.5%	97.5%	误差(%)
A	11.7207	1.164	9.506	14.07	6.55
B	-6264.6	396.4	-7062.0	-5511.0	4.41
γ	1.5089	0.02694	1.455	1.562	0.60
σ	0.0098	8.347E-4	0.008264	0.01159	1.72
σ_1	0.4320	0.03881	0.3539	0.5067	13.61

表 27 不考虑样本间差异的参数估计结果及相对误差

参数	均值(Par_{est})	标准差	2.5%	97.5%	误差(%)
A	10.5522	1.15	8.795	13.04	4.07
B	-5904.4	388.2	-6713.0	-5305.0	1.59
γ	1.5413	0.02971	1.482	1.6	2.76
σ	0.0104	9.77E-4	0.008629	0.01246	3.94

表 26 和表 27 分别给出了两种案例下的参数估计结果及 95% 置信区间和相对误差。对于非线性参数 γ , Case2 的估计结果比 Case1 准确。相比于线性场景下, Case1 的扩散系数也大于 Case2, 但是没有那么显著, 可能是由小样本情况下 σ_1 估计精度不高引起的。

图 49 给出了两种案例下的可靠度评估曲线及实际值, 与线性场景的结果类似, Case2 的结果更接近于真实值且比 Case1 平滑, 意味着在 ADT 分析中需要考虑样本间差异性的影响。图 49 也给出了 Case2 的 95% 置信区间, 略微偏离实际曲线但比 Case1 表现好。若关注可靠度为 0.9 的寿命, 则可靠寿命分别为 2670 小时 ([2470, 2870]小时) 和 2701 小时, 实际值为 2400 小时。

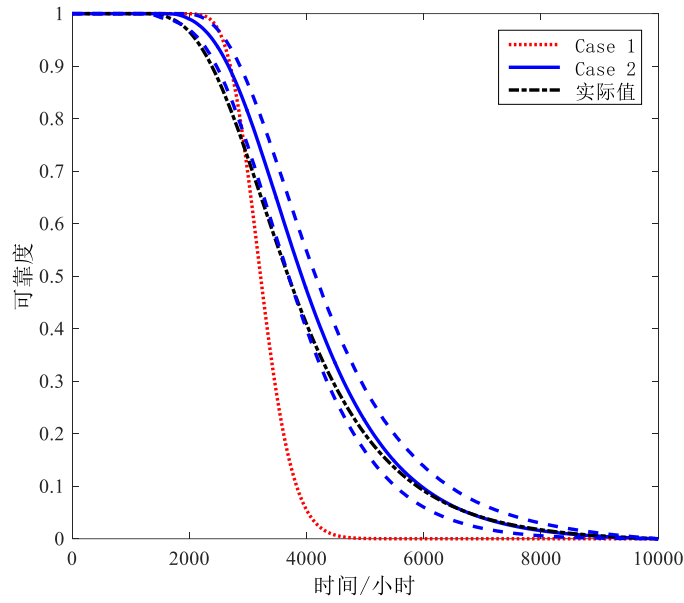


图 49 非线性场景下两个案例对应的可靠度曲线及实际曲线

7.3.2.2 外场使用的寿命预测

对于图 47(b)的两个目标产品, 具有 13 个监测点数据且退化路径超过失效阈值, 因此基于此全寿命周期退化数据开展剩余寿命预测, 能够验证预测结果的正确性。

根据 7.3.2.1 节 ADT 结果, 设置模型先验信息为: $\hat{\mu}_0=1.0128e-04$, $P_{0|0}=2.1039e-09$, $\sigma=0.0098$, $\gamma=1.5089$ 。在每个监测点, 基于算法 1 和式(7.19)给出剩余寿命的概率密度函数, 如图 50 所示。显然, 随着退化数据的累积, 剩余寿命估计结果越来越准确, 尤其是在产品接近于失效时。

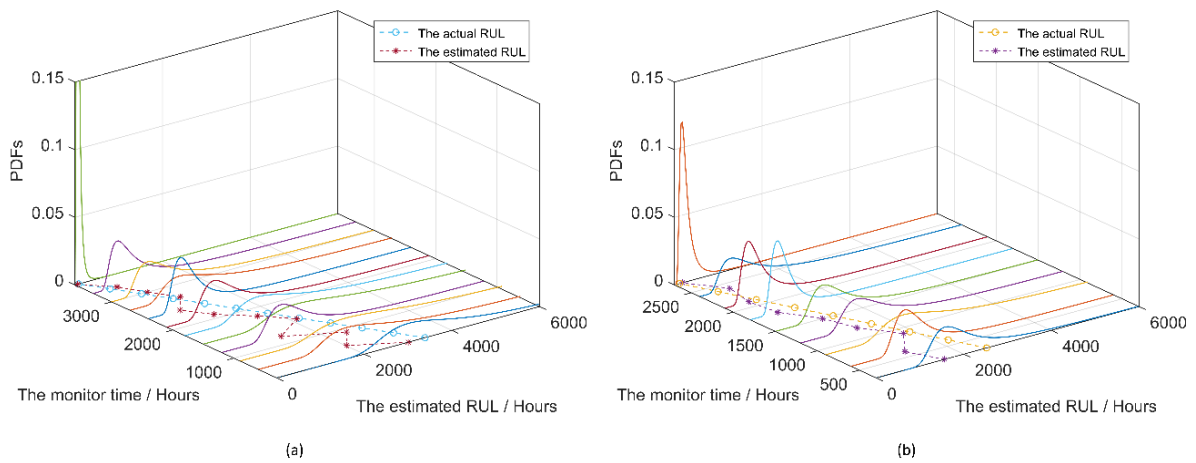


图 50 图 25 (a) 样本 1 和 (b) 样本 2 剩余寿命的概率密度函数 (至失效前时刻)

图 51 给出了两个外场产品的预测路径与实际路径的相对误差，其值在初始时刻后经历一个显著下降的过程，此时初值的影响能够忽略。因而，ADT 分析得到的信息能够作为外场寿命预测的先验知识并开展非线性退化路径建模。

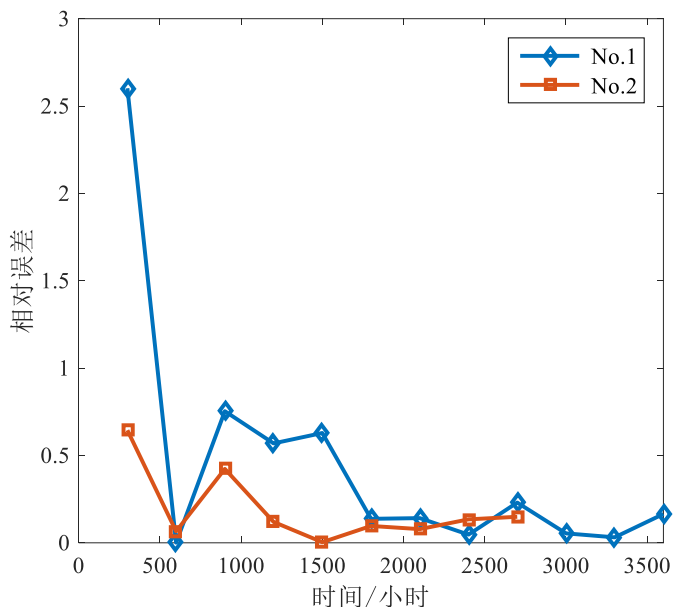


图 51 非线性场景下外场预测路径和实际路径的相对误差

7.4 讨论与分析

本节将基于一个实际工程案例来验证所提方法在 ADT 建模和外场剩余寿命预测的有效性，并对比分析所提方法与另外两种模型的可靠度评估结果。Liao 和 Elsayed[128] 给出了发光二极管的 CSADT 数据，共计四个加速应力水平，如表 28 所示，正常应力是温度 40°C 和电流 10mA。表 29 给出一组外场 LED 仿真退化数据。假设当光强度低于初始值的 50%值，认为 LED 失效。

表 28 LED 的恒定应力加速退化试验信息

条件	内容	值
加速状态	应力 1&2 (T/°C, I/mA)	140 40, 140 35, 165 40, 165 35
	监测点(Hours)	50, 100, 150, 200, 250
	样本量	20 (5 LEDs/应力水平)
	加速模型	$\varphi(s_1)=1/(273.15+T)$, $\varphi(s_2)=\ln(I)$

表 29 外场使用的 LED 退化值

内容	监测值					
	0	1000	2000	3000	4000	5000
监测点(Hours)	0	1000	2000	3000	4000	5000
光强度(lumen/m ²)	150	126.74	112.77	97.20	90.36	84.74
相对退化	0	0.1551	0.2482	0.3520	0.3976	0.4369

根据式(7.27)将原始性能退化数据（光强度）转化为相对退化量。

$$x_i = \frac{x_0 - x_i}{x_0} \quad (7.27)$$

式中， x_i 是第 i 个退化数据， $x_0=150$ ，见图 52 和表 29。

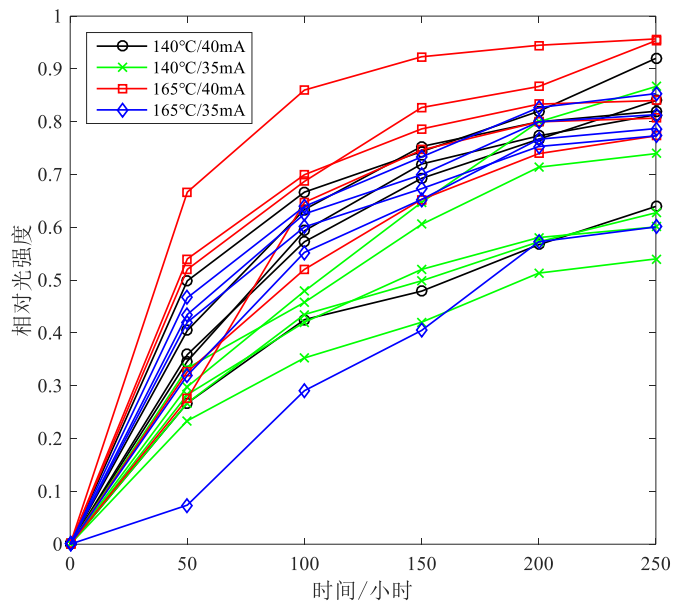


图 52 LED 的 CSADT 数据

显然，LED 的退化路径服从非线性趋势，因此选择时间尺度变换 $\Lambda(t) = t^\nu$ 开展 ADT 建模与外场寿命预测。在 7.3 节仿真案例，对 ADT 分析中的样本间差异性进行了讨论，本节从模型选择的角度来进一步阐述其重要性。方差信息准则（Deviance information criterion, DIC）常用于贝叶斯分层模型的选择，其值越小表明模型越好^[208]。

$$DIC = \overline{D(\theta)} + p_D \quad (7.28)$$

式中， p_D 表示有效参数的数目， $\overline{D(\theta)} = E^\theta [D(\theta)]$ 表示依赖于未知参数 θ 的后验均方差， $D(\theta) = -2\ln(p(x|\theta))$ ，由式(7.22)给出。

表 30 给出了 ADT 模型参数估计结果，案例二具有更小的 DIC 值意味着其更适用于 ADT 分析，且验证了样本间差异性的存在。

表 30 两种案例下针对 LED 的 CSADT 参数估计结果

案例	参数	均值	标准差	2.5%	97.5%	DIC
Case1	A	-3.79	2.422	-8.438	1.129	-280
	B_1	-943.8	567.5	-2126.0	180.8	
	B_2	0.9418	0.5649	-0.1727	1.983	
	γ	0.42	0.025	0.3737	0.4726	
	σ	0.040	0.0053	0.03107	0.05169	
Case2	A	-3.71	3.20	-9.477	2.57	-301
	B_1	-716.4	698.4	-2155.0	577.0	
	B_2	0.64	0.72	-0.7157	2.028	
	γ	0.42	0.025	0.3689	0.4707	
	σ	0.034	0.0073	0.01925	0.04764	
	σ_1	0.16	0.11	0.003685	0.3691	

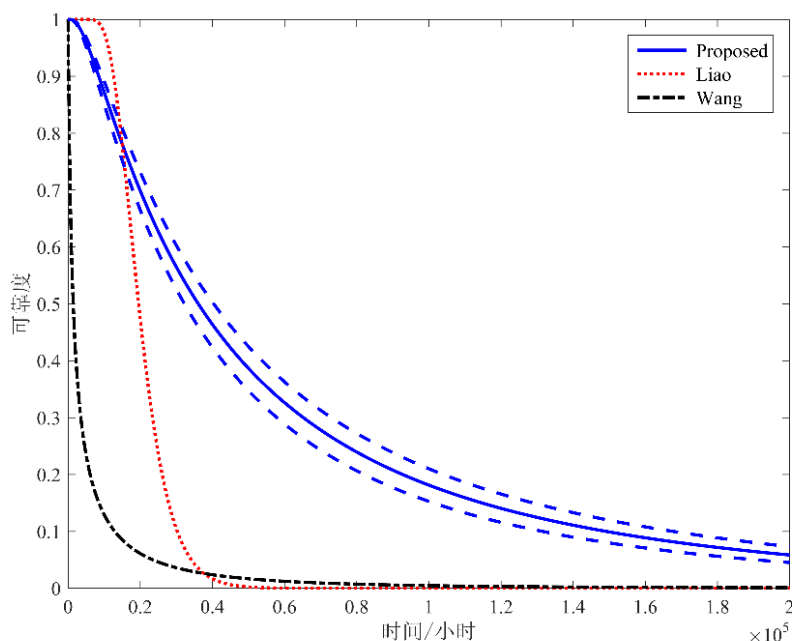


图 53 可靠度曲线：本章方法、Liao 模型和 Wang 模型

此外，图 53 给出了本章方法（Case2）与 Liao 和 Elsayed[128]和 Wang 等人[130]的可靠度评估对比结果。注意到 Liao 的模型主要考虑未来应力的波动性，假设扩散系数是加速应力的函数（本章假设为常值，见假设 2)和 4)。未来应力的波动肯定会动态影响产品退化，如式(7.1)的漂移系数，但无法确定其为随机的。式(7.10)所示能够更好地表示外场寿命预测中应力动态波动的影响。而对于 Wang 的模型，其针对漂移系数和扩散系数分别引入了两个修正因子来表征内外场信息的差异性，该方法适用于外场数据量非常充分的情况。但是，LED 案例外场仅有五个数据点（表 29），以此来估计两个修正因子会由于小样本带来的估计误差，这使得可靠度评估结果显著偏离本章所提方法的结果，

如图 53 所示。此外，Wang 的模型没有区分样本间差异性和随机差异性，这表明本章方法具有较好的优越性。

根据表 30 提供的先验信息开展外场寿命预测，如图 54 所示，该结果能够为维护决策提供依据。

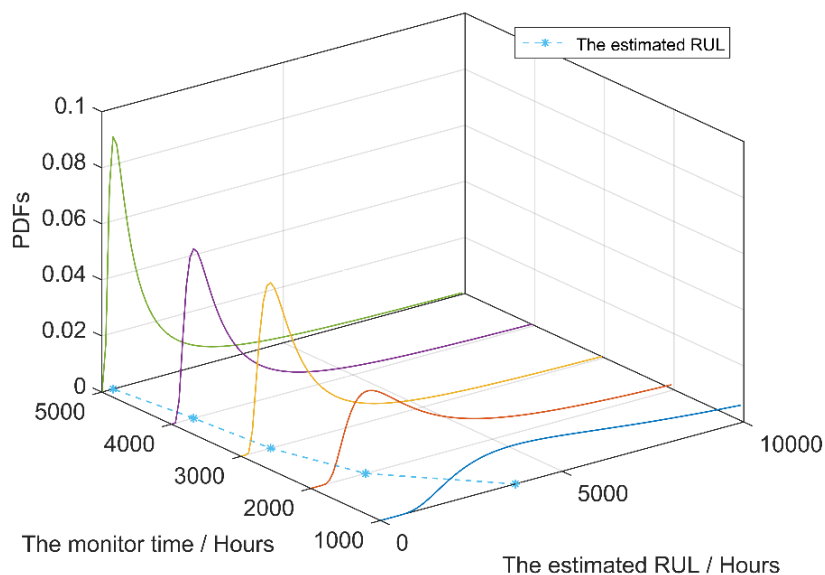


图 54 LED 外场剩余寿命的概率密度函数

7.5 本章小结

本章基于修正维纳过程模型，提出一种结合 ADT 数据的外场剩余寿命预测框架。该框架利用产品研发阶段的 ADT 数据辨识产品总体特征，即给出加速条件下的模型参数，同时考虑样本间的差异性，然后将正常条件下的模型看作外场预测的初始退化模型，同时构造外场状态转移方程来描述环境载荷的动态不确定性。当外场数据可获取时，该模型能够根据强跟踪滤波算法实时更新，降低总体特征在刻画个体特征时存在的认知不确定性，从而给出准确地寿命预测结果。此外，本章基于贝叶斯分层分析提出一种 MCMC 的未知参数估计方法，表 23 和表 26 的结果验证了方法的有效性。

根据仿真案例和 LED 案例可知，样本间差异性对寿命预测结果有显著影响，见图 44、图 49 和图 53。同时，结果也验证了本章所提的外场寿命预测框架在线性和非线性场景下的适用性。

结论与展望

1. 研究总结

本文针对加速退化建模中存在的随机和认知不确定性问题，重点研究认知不确定性的量化及寿命与可靠性评估方法：

1) 研究了区间型加速退化试验数据的评估方法。加速退化试验可能受测量、设备容差等因素影响而获得非精确退化数据，为此本文提出一种基于区间分析的加速退化建模方法，分别采用可能性模型和必要性模型作为产品性能退化模型和加速模型。通过某型金属合金的加速磨损数据对方法进行了验证，并分析该类数据不确定性对寿命与可靠性评估结果的影响，从而为量化该风险提供依据。

2) 研究了非直接观测加速退化试验数据的评估方法。该方法适用于无法直接获取产品性能参量的情况，如已知振动信号数据的旋转机械产品，因而需要进行特性提取与选择来给出产品的性能参量。该方法首先在各加速使用条件下从四个特征维度提取产品的寿命特征，再基于 PCA 方法进行高维特征集的降维处理，结合高斯混合模型的马氏距离来表征产品的性能退化状态，即 CV 值。其次，考虑到获取 CV 值过程中存在特征信息损失等带来的认知不确定问题，本文采用模糊回归的方法进行退化建模，从而给出各加速使用条件下的模糊失效时间数据，再基于对数线性加速模型开展寿命分布选取及模糊可靠性评估。最后，利用 IEEE PHM 2012 data challenge 的轴承加速试验数据对所提方法进行验证。

3) 研究了小样本状态下的加速退化试验评估方法。在实际工程中，存在样本量稀缺的情况，如 1-3 个样本，而传统基于大样本假设的统计建模方法无法刻画小样本带来的认知不确定性问题。为此，本文结合专家信度，基于不确定理论开展不确定加速退化建模与确信可靠度评估，为组件级产品的可靠性评估提供了必要工具，并以电连接器应力松弛数据验证方法的有效性。

4) 研究了加速退化建模中随机过程模型选择不确定性的量化方法。目前，加速退化建模主要采用基于随机过程的退化模型，来刻画性能参量的瞬时不确定性。然而现有研究仅依赖于某一随机过程而忽略了模型不确定性的问题。本文提出基于贝叶斯模型平均的加速退化建模方法，根据模型后验概率开展模型寿命评估结果的融合，通过电连接器的应力松弛数据验证了方法的有效性。此外，从收敛概率及平均区间宽度两个角度，

通过仿真分析可知：贝叶斯模型平均方法相比于单一模型、AIC 及最大后验概率所选取的模型，具有更好的寿命评价效能。

5) 研究了非完备 ADT 数据融合中存在加速应力类型不确定性的建模方法。本文基于互斥集合理论将所有数据集所隐含的加速应力集合进行重新分配，划分若干个互斥集合并分配加和为一的概率，根据集合理论给出各数据集的发生概率，从而实现多源非完备 ADT 数据集的融合评估，通过仿真案例验证了方法的有效性，并对比分析了该方法比传统融合评估方法的优势。

6) 研究了产品外场个体特性与内场总体特征存在差异性的实时剩余寿命预测方法。本文首先基于内场 ADT 信息给出表征产品总体特征的先验预测模型，同时提出一种状态转移模型来刻画外场环境载荷的动态不确定性。当外场数据可获取时，基于强跟踪算法实现模型参量的实时更新，不断修正总体特征使其趋向于产品外场的个体特征，从而实现准确合理地实时剩余寿命预测。本文通过线性和非线性仿真案例验证了方法的有效性，并采用 LED 实际数据对比了该方法与两类内外场融合评估方法，验证了所提方法的优势。

2. 主要创新点

总结全文，研究工作取得了一定的成果，所体现的创新点主要有：

1) 提出了基于不确定过程的确信可靠性评估方法，通过专家信度来刻画小样本下加速退化试验数据存在的认知不确定性问题，采用不确定过程表征退化过程随时间的动态变化情况，基于不确定测度给出确信可靠性评价方法，实现了组件级产品在信息匮乏条件下的可靠性评估，同时也为系统级确信可靠性评估提供了依据。

2) 提出基于贝叶斯模型平均的模型不确定性量化方法。为了全面刻画模型选择所带来的不确定性对产品寿命与可靠性评估结果的影响，本文构造贝叶斯模型平均模型，通过模型后验概率及 p 分位寿命的后验分布，来全面量化各随机过程模型的影响，结果显示该方法能够有效地表征模型不确定性，并给出合理的寿命与可靠性推断结果。

3) 提出了基于互斥集合理论的多源非完备 ADT 数据集融合评估方法，通过构造加速应力类型的互斥集合及分配概率，来表征各应力类型子集合对产品性能退化信息的贡献程度，从而合理有效地实现不同试验条件下多源信息的融合。该方法能够涵盖相同应力类型及独立应力类型条件下的多源信息 ADT 数据融合，具有更强的泛化能力。

3. 未来研究展望

本文在考虑混合不确定性的加速退化建模方法方向做了一些初步性的工作，结合研究过程中的理解与体会，认为未来研究可以在以下几个方面来开展：

1) 本研究主要针对单一性能退化参数开展混合不确定性研究，然而在实际工程中可能存在多性能参量的情况，如液压系统的振动信号数据、泄漏量及油液污染颗粒浓度等。因此，探讨多性能参数下如何对加速退化中存在的混合不确定性进行建模评估，会更好支撑工程实际应用。

2) 本研究的重点是在加速退化建模中考虑混合不确定性的影响，同样在试验设计方面也需要考虑不确定性对于目标决策变量的影响，从而给出最合理的试验方案。因此，研究考虑混合不确定性的加速退化试验设计是一个研究方向。

3) 本研究的各项内容主要针对特定的工程场景，缺乏对各类认知不确定性源的纵向对比研究，在实际中可能同时存在小样本、数据非精确性、模型选择、非完备 ADT 信息等情况。如何处理此类复杂条件下的可靠度建模评估仍将是一个挑战。

附录 A 期望信息矩阵 $I(\theta_c)$

由式(5.6)可知, μ_i 对参数 α_0 和 α_1 的一阶和二阶偏导分别为 $\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial^2 \mu_i}{\partial \alpha_0^2} = \mu_i$, $\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial^2 \mu_i}{\partial \alpha_0 \alpha_1} = \mu_i s_i$ 和 $\frac{\partial^2 \mu_i}{\partial \alpha_1^2} = \mu_i s_i^2$ 。当 $\Lambda(t) = t^\gamma$ 时, 即 $\Lambda_{ijk} = t_{ijk}^\gamma - t_{ij(k-1)}^\gamma$, 则 $\frac{\partial \Lambda_{ijk}}{\partial \gamma} = t_{ijk}^\gamma \ln t_{ijk} - t_{ij(k-1)}^\gamma \ln t_{ij(k-1)}$ 。

对于维纳过程模型, 有 $E(x_{ijk}) = \mu_i \Lambda_{ijk}$ 和 $E[(x_{ijk} - \mu_i \Lambda_{ijk})^2] = \sigma^2 \Lambda_{ijk}$, 则 $I(\theta_1)$ 的各元素见式(A-1)-(A-10)所列。

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial \alpha_0^2}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2} \quad (\text{A-1})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial \alpha_1^2}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{\mu_i^2 s_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2} \quad (\text{A-2})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial (\sigma^2)^2}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{1}{2\sigma^4} \quad (\text{A-3})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial \gamma^2}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \left(\frac{1}{2\Lambda_{ijk}^2} + \frac{\mu_i^2}{\sigma^2 \Lambda_{ijk}}\right) \left(\frac{\partial \Lambda_{ijk}}{\partial \gamma}\right)^2 \quad (\text{A-4})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1}\right] = E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_0}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{\mu_i^2 s_i \Lambda_{ijk}}{\sigma^2} \quad (\text{A-5})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial \alpha_0 \partial \sigma^2}\right] = E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial \sigma^2 \partial \alpha_0}\right] = 0 \quad (\text{A-6})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial \alpha_0 \partial \gamma}\right] = E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial \gamma \partial \alpha_0}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{\mu_i^2}{\sigma^2} \frac{\partial \Lambda_{ijk}}{\partial \gamma} \quad (\text{A-7})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial \alpha_1 \partial \sigma^2}\right] = E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial \sigma^2 \partial \alpha_1}\right] = 0 \quad (\text{A-8})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial \alpha_1 \partial \gamma}\right] = E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial \gamma \partial \alpha_1}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{\mu_i^2 s_i}{\sigma^2} \frac{\partial \Lambda_{ijk}}{\partial \gamma} \quad (\text{A-9})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial \sigma^2 \partial \gamma}\right] = E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_1 | M_1, D)}{\partial \gamma \partial \sigma^2}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{1}{2\sigma^2 \Lambda_{ijk}} \frac{\partial \Lambda_{ijk}}{\partial \gamma} \quad (\text{A-10})$$

对于伽马过程模型，有 $E(x_{ijk}) = \mu_i \Lambda_{ijk}$ 和 $E[\ln x_{ijk}] = \psi\left(\frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2}\right) + \ln \frac{\sigma^2}{\mu_i}$ ，则 $\mathbf{I}(\theta_2)$ 的各元素见式(A-11)-(A-20)所列。这里， $\psi(\cdot)$ 和 $\psi_1(\cdot)$ 分别表示双伽马和三伽马函数^[209]。

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial \alpha_0^2}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \Psi_1\left(\frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2}\right) \frac{4\mu_i^4 \Lambda_{ijk}^2}{\sigma^4} - \frac{3\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2} \quad (\text{A-11})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial \alpha_1^2}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \Psi_1\left(\frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2}\right) \frac{4\mu_i^4 s_i^2 \Lambda_{ijk}^2}{\sigma^4} - \frac{3\mu_i^2 s_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2} \quad (\text{A-12})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial (\sigma^2)^2}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \Psi_1\left(\frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2}\right) \frac{\mu_i^4 \Lambda_{ijk}^2}{\sigma^8} - \frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^6} \quad (\text{A-13})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial \gamma^2}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \Psi_1\left(\frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2}\right) \frac{\mu_i^4}{\sigma^4} \left(\frac{\partial \Lambda_{ijk}}{\partial \gamma}\right)^2 \quad (\text{A-14})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1}\right] = E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_0}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \Psi_1\left(\frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2}\right) \frac{4\mu_i^4 s_i \Lambda_{ijk}^2}{\sigma^4} - \frac{3\mu_i^2 s_i \Lambda_{ijk}}{\sigma^2} \quad (\text{A-15})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial \alpha_0 \partial \sigma^2}\right] = E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial \sigma^2 \partial \alpha_0}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} -\Psi_1\left(\frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2}\right) \frac{2\mu_i^4 \Lambda_{ijk}^2}{\sigma^6} + \frac{2\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^4} \quad (\text{A-16})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial \alpha_0 \partial \gamma}\right] = E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial \gamma \partial \alpha_0}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \left(\Psi_1\left(\frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2}\right) \frac{2\mu_i^4 \Lambda_{ijk}}{\sigma^4} - \frac{\mu_i^2}{\sigma^2}\right) \frac{\partial \Lambda_{ijk}}{\partial \gamma} \quad (\text{A-17})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial \alpha_1 \partial \sigma^2}\right] = E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial \sigma^2 \partial \alpha_1}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} -\Psi_1\left(\frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2}\right) \frac{2\mu_i^4 s_i \Lambda_{ijk}^2}{\sigma^6} + \frac{2\mu_i^2 s_i \Lambda_{ijk}}{\sigma^4} \quad (\text{A-18})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial \alpha_1 \partial \gamma}\right] = E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial \gamma \partial \alpha_1}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \left(\Psi_1\left(\frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2}\right) \frac{2\mu_i^4 s_i \Lambda_{ijk}}{\sigma^4} - \frac{\mu_i^2 s_i}{\sigma^2}\right) \frac{\partial \Lambda_{ijk}}{\partial \gamma} \quad (\text{A-19})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial \sigma^2 \partial \gamma}\right] = E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_2 | M_2, D)}{\partial \gamma \partial \sigma^2}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \left(-\Psi_1\left(\frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2}\right) \frac{\mu_i^4 \Lambda_{ijk}}{\sigma^6} + \frac{\mu_i^2}{\sigma^4}\right) \frac{\partial \Lambda_{ijk}}{\partial \gamma} \quad (\text{A-20})$$

对于逆高斯过程模型，有 $E(x_{ijk}) = \mu_i \Lambda_{ijk}$ 和 $E\left[\frac{1}{x_{ijk}}\right] = \frac{1}{\mu_i \Lambda_{ijk}} + \frac{\sigma^2}{\mu_i^3 \Lambda_{ijk}^2}$ ，则 $\mathbf{I}(\theta_3)$ 的各元素见式(A-21)-(A-30)所列。

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_3 | M_3, D)}{\partial \alpha_0^2}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{9}{2} + \frac{\mu_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2} \quad (\text{A-21})$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 l(\theta_3 | M_3, D)}{\partial \alpha_1^2}\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{9}{2} s_i^2 + \frac{\mu_i^2 s_i^2 \Lambda_{ijk}}{\sigma^2} \quad (\text{A-22})$$

$$E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_3 | M_3, D)}{\partial (\sigma^2)^2} \right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{1}{2\sigma^4} \quad (\text{A-23})$$

$$E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_3 | M_3, D)}{\partial \gamma^2} \right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \left(\frac{2}{\Lambda_{ijk}^2} + \frac{\mu_i^2}{\sigma^2 \Lambda_{ijk}} \right) \left(\frac{\partial \Lambda_{ijk}}{\partial \gamma} \right)^2 \quad (\text{A-24})$$

$$E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_3 | M_3, D)}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1} \right] = E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_3 | M_3, D)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_0} \right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \left(\frac{9}{2} s_i + \frac{\mu_i^2 s_i \Lambda_{ijk}}{\sigma^2} \right) \quad (\text{A-25})$$

$$E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_3 | M_3, D)}{\partial \alpha_0 \partial \sigma^2} \right] = E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_3 | M_3, D)}{\partial \sigma^2 \partial \alpha_0} \right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \left(-\frac{3}{2\sigma^2} \right) \quad (\text{A-26})$$

$$E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_3 | M_3, D)}{\partial \alpha_0 \partial \gamma} \right] = E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_3 | M_3, D)}{\partial \gamma \partial \alpha_0} \right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \left(\frac{\mu_i^2}{\sigma^2} + \frac{3}{\Lambda_{ijk}} \right) \frac{\partial \Lambda_{ijk}}{\partial \gamma} \quad (\text{A-27})$$

$$E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_3 | M_3, D)}{\partial \alpha_1 \partial \sigma^2} \right] = E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_3 | M_3, D)}{\partial \sigma^2 \partial \alpha_1} \right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \left(-\frac{3s_i}{2\sigma^2} \right) \quad (\text{A-28})$$

$$E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_3 | M_3, D)}{\partial \alpha_1 \partial \gamma} \right] = E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_3 | M_3, D)}{\partial \gamma \partial \alpha_1} \right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \left(\frac{\mu_i^2 s_i}{\sigma^2} + \frac{3s_i}{\Lambda_{ijk}} \right) \frac{\partial \Lambda_{ijk}}{\partial \gamma} \quad (\text{A-29})$$

$$E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_3 | M_3, D)}{\partial \sigma^2 \partial \gamma} \right] = E \left[-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}_3 | M_3, D)}{\partial \gamma \partial \sigma^2} \right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} -\frac{1}{\sigma^2 \Lambda_{ijk}} \frac{\partial \Lambda_{ijk}}{\partial \gamma} \quad (\text{A-30})$$

附录 B p 分位寿命关于参数 θ 的一阶偏导

对于正常应力条件下的 p 分位寿命 t_p ，见式(5.13)，其关于参数的一阶偏导为 $\nabla t_p = \left[\frac{\partial t_p}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial t_p}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial t_p}{\partial \sigma^2}, \frac{\partial t_p}{\partial \gamma} \right]'$ ，各元素见式(B-1)-(B-4)所列。这里， $A = B^2/4 \sqrt{\omega \sigma^2 / \exp(3\alpha_0)}$ ， $B = z_p + \sqrt{4\omega \exp(\alpha_0) / \sigma^2 + z_p^2}$ 。

$$\frac{\partial t_p}{\partial \alpha_0} = -\frac{1}{\gamma} A^{(2/\gamma-1)} \left(\frac{\sigma z_p}{\exp(\alpha_0)} + B^{-1/2} \frac{\sigma^2 z_p^2}{2 \exp(2\alpha_0)} \right) \quad (\text{B-1})$$

$$\frac{\partial t_p}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (\text{B-2})$$

$$\frac{\partial t_p}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\gamma} A^{(2/\gamma-1)} \left(\frac{z_p}{2 \exp(\alpha_0) \sigma} + B^{-1/2} \frac{z_p^2}{4 \exp(2\alpha_0)} \right) \quad (\text{B-3})$$

$$\frac{\partial t_p}{\partial \gamma} = -\frac{2 \ln A}{\gamma^2} A^{2/\gamma} \quad (\text{B-4})$$

参考文献

- [1] Nelson W. B. Accelerated testing: statistical models, test plans, and data analysis[M], John Wiley & Sons, 2009.
- [2] Meeker W. Q., Escobar L. A., Lu C. J. Accelerated degradation tests: modeling and analysis[J]. *Technometrics*, 1998, 40(2):89-99.
- [3] 邓爱民, 陈循, 张春华, 汪亚顺. 加速退化试验技术综述[J]. *兵工学报*, 2007, (8):1002-1007.
- [4] Helton J. C., Burmaster D. E. Guest editorial: treatment of aleatory and epistemic uncertainty in performance assessments for complex systems[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 1996, 54(2-3):91-94.
- [5] Zio E. Reliability engineering: Old problems and new challenges[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2009, 94(2):125-141.
- [6] Zio E. Reliability Analysis of Systems of Systems[J]. *IEEE Reliability Magazine*, 2016:1-6.
- [7] Stewart M. G., Rosowsky D. V. Time-dependent reliability of deteriorating reinforced concrete bridge decks[J]. *Structural Safety*, 1998, 20(1):91-109.
- [8] Helton J. C. Probability, conditional probability and complementary cumulative distribution functions in performance assessment for radioactive waste disposal[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 1996, 54(2-3):145-163.
- [9] Kumamoto H., Henley E. J. Probabilistic risk assessment and management for engineers and scientists[M], Second Edition, Wiley-IEEE Press, 2000.
- [10] Stamatelatos M., Dezfuli H., Apostolakis G., Everline C., Guarro S., Mathias D., Mosleh A., Paulos T., Riha D., Smith C., Probabilistic risk assessment procedures guide for NASA managers and practitioners, 2011.
- [11] Winkler R. L. Uncertainty in probabilistic risk assessment[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 1996, 54(2-3):127-132.
- [12] Parry G. W. The characterization of uncertainty in Probabilistic Risk Assessments of complex systems[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 1996, 54(2-3):119-126.
- [13] Paté-Cornell M. E. Uncertainties in risk analysis: Six levels of treatment[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 1996, 54(2-3):95-111.
- [14] Kiureghian A. D., Didevsen O. Aleatory or epistemic? Does it matter?[J]. *Structural Safety*, 2009, 31(2):105-112.
- [15] Hoeting J. A., Madigan D., Raftery A. E., Volinsky C. T. Bayesian model averaging: a tutorial[J]. *Statistical science*, 1999:382-401.
- [16] Zhang R., Mahadevan S. Model uncertainty and Bayesian updating in reliability-based inspection[J]. *Structural Safety*, 2000, 22(2):145-160.
- [17] Sankararaman S., Ling Y., Mahadevan S. Uncertainty quantification and model validation of fatigue crack growth prediction[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2011, 78(7):1487-1504.
- [18] Park I., Grandhi R. V. A Bayesian statistical method for quantifying model form uncertainty and two model combination methods[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2014, 129:46-56.
- [19] 宋述芳, 吕震宙, 张伟伟, 叶正寅, 乔红威. 机翼气动弹性的随机不确定性分析研究[J]. *振动工程学报*, 2009, (3):227-231.
- [20] 汤咏, 基于不确定性的航空发动机涡轮盘概率疲劳寿命预测[D], 硕士, 电子科技大学, 2013.
- [21] 唐健, 吴志刚, 杨超. 考虑结构刚度不确定性的概率颤振分析[J]. *北京航空航天大学学报*, 2014,

- (4):569-574.
- [22] Zhu S. P., Huang H. Z., Peng W. W., Wang H. K., Mahadevan S. Probabilistic Physics of Failure-based framework for fatigue life prediction of aircraft gas turbine discs under uncertainty[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2016, 146:1-12.
- [23] Moore R. E. Interval analysis[M], Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1966.
- [24] Alefeld G., Mayer G. Interval analysis: theory and applications[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, 121(1-2):421-464.
- [25] 姜潮, 基于区间的不确定性优化理论与算法[D], 博士, 湖南大学, 2008.
- [26] Ben-Haim Y., Elishakoff I. Convex models of uncertainty in applied mechanics[M], Elsevier, 1990.
- [27] Elishakoff I., Elisseff P., Glegg S. a. L. Nonprobabilistic, convex-theoretic modeling of scatter in material properties[J]. *AIAA Journal*, 1994, 32(4):843-849.
- [28] Ben-Haim Y. Convex Models of Uncertainty in Radial Pulse Buckling of Shells[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1993, 60(3):683-88.
- [29] Ben-Haim Y. A non-probabilistic concept of reliability[J]. *Structural Safety*, 1994, 14(4):227-245.
- [30] Elishakoff I., Duan D. Application of mathematical theory of interval analysis to uncertain vibrations[C]// *Proceedings of the 1994 National Conference on Noise Control Engineering*, 1994.
- [31] Qiu Z. P., Chen S. H., Elishakoff I. Natural frequencies of structures with uncertain but nonrandom parameters[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1995, 86(3):669-683.
- [32] Tanaka H., Lee H. Interval regression analysis by quadratic programming approach[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1998, 6(4):473-481.
- [33] Muhanna R. L., Mullen R. L. Uncertainty in Mechanics Problems—Interval-Based Approach[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2001, 127(6):557-566.
- [34] Barboza L. V., Dimuro G. P., Reiser R. H. Towards interval analysis of the load uncertainty in power electric systems[C]// *Probabilistic Methods Applied to Power Systems*, 2004 International Conference on, IEEE, 2004.
- [35] Wu W. D., Rao S. S. Uncertainty analysis and allocation of joint tolerances in robot manipulators based on interval analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2007, 92(1):54-64.
- [36] Hu J. X., Qiu Z. P. Non-probabilistic convex models and interval analysis method for dynamic response of a beam with bounded uncertainty[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, 34(3):725-734.
- [37] Weichselberger K. The theory of interval-probability as a unifying concept for uncertainty[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2000, 24(2-3):149-170.
- [38] Kreinovich V., Xiang G., Starks S. A., Longpré L., Ceberio M., Araiza R., Beck J., Kandathi R., Nayak A., Torres R., Hajagos J. G. Towards Combining Probabilistic and Interval Uncertainty in Engineering Calculations: Algorithms for Computing Statistics under Interval Uncertainty, and Their Computational Complexity[J]. *Reliable Computing*, 2006, 12(6):471-501.
- [39] Zaman K., Rangavajhala S., McDonald M. P., Mahadevan S. A probabilistic approach for representation of interval uncertainty[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2011, 96(1):117-130.
- [40] Sankararaman S., Mahadevan S. Likelihood-based representation of epistemic uncertainty due to sparse point data and/or interval data[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2011, 96(7):814-824.
- [41] 王军, 邱志平, 王晓军. 应力强度因子的区间分析方法[J]. *航空学报*, 2008, 29(3):611-615.
- [42] 祁武超, 邱志平. 基于区间分析的结构非概率可靠性优化设计[J]. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2013, 43(1):85-93.
- [43] 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J]. *计算力学学报*, 2001,

- (1):56-60.
- [44] 苏静波, 邵国建. 基于区间分析的工程结构不确定性研究现状与展望[J]. 力学进展, 2005, 35(3):338-344.
- [45] 刘继红, 安向男, 敬石开. 随机与区间不确定性下的序列化多学科可靠性分析[J]. 计算机集成制造系统, 2013, 19(7):1441-1446.
- [46] Zadeh L. A. Fuzzy sets[J]. *Information and Control*, 1965, 8(3):338-353.
- [47] Zadeh L. A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility[J]. *Fuzzy sets and systems*, 1978, 1:3-28.
- [48] Cai K.-Y., Wen C.-Y., Zhang M.-L. Fuzzy variables as a basis for a theory of fuzzy reliability in the possibility context[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, 42(2):145-172.
- [49] Cai K.-Y., Wen C.-Y., Zhang M.-L. Fuzzy states as a basis for a theory of fuzzy reliability[J]. *Microelectronics Reliability*, 1993, 33(15):2253-2263.
- [50] Utkin L. V., Gurov S. V. A general formal approach for fuzzy reliability analysis in the possibility context[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 83(2):203-213.
- [51] Guimarães A. C. F., Ebecken N. F. F. FuzzyFTA: a fuzzy fault tree system for uncertainty analysis[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 1999, 26(6):523-532.
- [52] Huang H. Z., Zuo M. J., Sun Z. Q. Bayesian reliability analysis for fuzzy lifetime data[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2006, 157(12):1674-1686.
- [53] 黄洪钟, 孙占全, 郭东明, 李丽, 周峰, 田志刚. 随机应力模糊强度时模糊可靠性的计算理论[J]. 机械强度, 2001, (3):305-307.
- [54] Moller B., Graf W., Beer M. Safety assessment of structures in view of fuzzy randomness[J]. *Computers & Structures*, 2003, 81(15):1567-1582.
- [55] Kala Z. Stability problems of steel structures in the presence of stochastic and fuzzy uncertainty[J]. *Thin-Walled Structures*, 2007, 45(10-11):861-865.
- [56] Möller B., Beer M. Fuzzy randomness: uncertainty in civil engineering and computational mechanics[M], Springer Science & Business Media, 2013.
- [57] 马瑞, 康仁, 姜飞, 熊龙珠, 李凌霄, 徐慧明. 考虑风电随机模糊不确定性的电力系统多目标优化调度计划研究[J]. 电力系统保护与控制, 2013, (1):150-156.
- [58] Li Y. F., Ding Y., Zio E. Random Fuzzy Extension of the Universal Generating Function Approach for the Reliability Assessment of Multi-State Systems Under Aleatory and Epistemic Uncertainties[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2014, 63(1):13-25.
- [59] Liu B. Uncertainty Theory[M], Second, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007:205-234.
- [60] Liu B. Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty[M], Third, Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [61] Liu B. Uncertain Risk Analysis and Uncertain Reliability Analysis[J]. *Journal of Uncertain Systems*, 2010, 4(3):163-170.
- [62] Zeng Z., Wen M., Kang R. Belief reliability: a new metrics for products' reliability[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2013, 12(1):15-27.
- [63] Zeng Z., Failure Rates of Some Typical Belief Reliability Functions[C], Proceedings of the Eleventh International Conference on Information and Management Sciences, Dunhuang, China, 2012.
- [64] Zeng Z., Kang R., Chen Y., A Physics-of-Failure-based approach for failure behavior modeling: With a focus on failure collaborations[C], in European Safety and Reliability Conference, ESREL 2014, Wroclaw, Poland, 2014.
- [65] 曾志国, 确信可靠性度量与分析方法[D], 博士, 北京航空航天大学, 2015.
- [66] Zeng Z., Kang R., Wen M., Chen Y. Measuring reliability during product development considering

- aleatory and epistemic uncertainty[C]// Reliability and Maintainability Symposium (RAMS), 2015 Annual, 2015.
- [67] 范梦飞, 曾志国, 康锐. 基于确信可靠度的可靠性评价方法[J]. 系统工程与电子技术, 2015, (11):2648-2653.
- [68] Wen M. L., Kang R. Reliability analysis in uncertain random system[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2016, 15(4):491-506.
- [69] 王倬, 不确定理论在结构可靠性中的应用[D], 硕士, 清华大学, 2010.
- [70] Wang Z., Structural Reliability Analysis using Uncertainty Theory[C], Proceedings of the First International Conference on Uncertainty Theory, Urumchi, China, 2010.
- [71] Miao Y., Uncertain Structural Reliability Analysis[C], Proceedings of the Twelfth International Conference on Information and Management Sciences, Kunming, China, 2013.
- [72] Aven T., Zio E. Some considerations on the treatment of uncertainties in risk assessment for practical decision making[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2011, 96(1):64-74.
- [73] Beer M., Ferson S., Kreinovich V. Imprecise probabilities in engineering analyses[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2013, 37(1-2):4-29.
- [74] Wang F. K., Chu T. P. Lifetime predictions of LED-based light bars by accelerated degradation test[J]. Microelectronics Reliability, 2012, 52(7):1332-1336.
- [75] Kim Y. T., Kim K. B., Hyun Y. E., Kim I. J., Yang S. Simulation study on the lifetime of electrochemical capacitors using the accelerated degradation test under temperature and voltage stresses[J]. Microelectronics Reliability, 2015, 55(12):2712-2720.
- [76] Cheng S. J., Yuan Z. Z., Ye X. P., Zhang F. Y., Liu J. C. Empirical prediction model for Li/SOCl₂ cells based on the accelerated degradation test[J]. Microelectronics Reliability, 2015, 55(1):101-106.
- [77] Thomas E. V., Bloom I., Christophersen J. P., Battaglia V. S. Statistical methodology for predicting the life of lithium-ion cells via accelerated degradation testing[J]. Journal of Power Sources, 2008, 184(1):312-317.
- [78] Chalk S. G., Miller J. F. Key challenges and recent progress in batteries, fuel cells, and hydrogen storage for clean energy systems[J]. Journal of Power Sources, 2006, 159(1):73-80.
- [79] Santini T., Morand S., Fouladirad M., Phung L. V., Miller F., Foucher B., Grall A., Allard B. Accelerated degradation data of SiC MOSFETs for lifetime and Remaining Useful Life assessment[J]. Microelectronics Reliability, 2014, 54(9-10):1718-1723.
- [80] Meeker W. Q., Hamada M. Statistical tools for the rapid development and evaluation of high-reliability products[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1995, 44(2):187-198.
- [81] Levenbach G. J. Accelerated Life Testing of Capacitors[J]. IRE Transactions on Reliability and Quality Control, 1957, PGRQC-10:9-20.
- [82] Patil N., Das D., Pecht M. A prognostic approach for non-punch through and field stop IGBTs[J]. Microelectronics Reliability, 2012, 52(3):482-488.
- [83] Liu J., Wang W., Ma F., Yang Y. B., Yang C. S. A data-model-fusion prognostic framework for dynamic system state forecasting[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2012, 25(4):814-823.
- [84] Meeker W. Q., Escobar L. A. A review of recent research and current issues in accelerated testing[J]. International Statistical Review, 1993, 61(1):147-168.
- [85] Elsayed E. A., Chen A. C. K., Recent research and current issues in accelerated testing[C], IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, 1998.
- [86] Escobar L. A., Meeker W. Q. A review of accelerated test models[J]. Statistical Science, 2006, 21(4):552-577.

- [87] 李晓阳, 姜同敏. 加速寿命试验中多应力加速模型综述[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(5):4.
- [88] 王召斌, 任万滨, 翟国富. 加速退化试验与加速寿命试验技术综述[J]. 低压电器, 2010, (9):1-6.
- [89] 郑德强, 张正平, 李海波, 吴建国, 徐静. 加速退化试验技术研究、应用与发展[J]. 装备环境工程, 2011, (2):100-104.
- [90] Wang W., Dragomir-Daescu D. Reliability quantification of induction motors-accelerated degradation testing approach[C]// Reliability and Maintainability Symposium, 2002. Proceedings. Annual, 2002.
- [91] Huard V., Denais M., Parthasarathy C. NBTI degradation: From physical mechanisms to modelling[J]. Microelectronics Reliability, 2006, 46(1):1-23.
- [92] Yang G. B., Yang K. Accelerated degradation - Tests with tightened critical values[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2002, 51(4):463-468.
- [93] Ebrahim M. a. H., Higgins J. J. Non-parametric analysis of a proportional wearout model for accelerated degradation data[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 174(1):365-373.
- [94] Lu C. J., Meeker W. O. Using Degradation Measures to Estimate a Time-to-Failure Distribution[J]. Technometrics, 1993, 35(2):161-174.
- [95] Park J. I., Bae S. J. Direct Prediction Methods on Lifetime Distribution of Organic Light-Emitting Diodes From Accelerated Degradation Tests[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2010, 59(1):74-90.
- [96] Bae S. J., Kvam P. H. A nonlinear random-coefficients model for degradation testing[J]. Technometrics, 2004, 46(4):460-469.
- [97] Pan R., Crispin T. A Hierarchical Modeling Approach to Accelerated Degradation Testing Data Analysis: A Case Study[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2011, 27(2):229-237.
- [98] Gao C. W., Meeker W. Q., Mayton D. Detecting cracks in aircraft engine fan blades using vibrothermography nondestructive evaluation[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2014, 131:229-235.
- [99] Wang Z. L., Huang H. Z., Du L. Reliability analysis on competitive failure processes under fuzzy degradation data[J]. Applied Soft Computing, 2011, 11(3):2964-2973.
- [100] Gonzalez-Gonzalez D. S., Alejo R. J. P., Cantu-Sifuentes M., Torres-Trevino L. M., Mendez G. M. A non-linear fuzzy regression for estimating reliability in a degradation process[J]. Applied Soft Computing, 2014, 16:137-147.
- [101] Wang X. L., Jiang P., Guo B., Cheng Z. J. Real-time Reliability Evaluation with a General Wiener Process-based Degradation Model[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2014, 30(2):205-220.
- [102] Ye Z.-S., Xie M. Stochastic modelling and analysis of degradation for highly reliable products (with discussion)[J]. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 2015, 31(1):16-36.
- [103] Van Noortwijk J. M. A survey of the application of gamma processes in maintenance[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2009, 94(1):2-21.
- [104] Whitmore G. A., Schenkelberg F. Modelling Accelerated Degradation Data Using Wiener Diffusion With A Time Scale Transformation[J]. Lifetime Data Analysis, 1997, 3(1):27-45.
- [105] Padgett W. J., Tomlinson M. A. Inference from accelerated degradation and failure data based on Gaussian process models[J]. Lifetime Data Analysis, 2004, 10(2):191-206.
- [106] Park C., Padgett W. J. Accelerated degradation models for failure based on geometric Brownian motion and gamma processes[J]. Lifetime Data Analysis, 2005, 11(4):511-27.
- [107] Park C., Padgett W. J. Stochastic degradation models with several accelerating variables[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2006, 55(2):379-390.
- [108] Pan Z. Q., Balakrishnan N. Reliability modeling of degradation of products with multiple performance

- characteristics based on gamma processes[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2011, 96(8):949-957.
- [109] Ling M. H., Tsui K. L., Balakrishnan N. Accelerated Degradation Analysis for the Quality of a System Based on the Gamma Process[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2015, 64(1):463-472.
- [110] Wang X., Xu D. H. An Inverse Gaussian Process Model for Degradation Data[J]. *Technometrics*, 2010, 52(2):188-197.
- [111] Wang X. Wiener processes with random effects for degradation data[J]. *Journal of Multivariate Analysis*, 2010, 101(2):340-351.
- [112] Tang S. J., Guo X. S., Yu C. Q., Xue H. J., Zhou Z. J. Accelerated Degradation Tests Modeling Based on the Nonlinear Wiener Process with Random Effects[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, Doi:10.1155/2014/560726
- [113] Ye Z. S., Chen N., Shen Y. A new class of Wiener process models for degradation analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2015, 139:58-67.
- [114] Lawless J., Crowder M. Covariates and random effects in a gamma process model with application to degradation and failure[J]. *Lifetime Data Analysis*, 2004, 10(3):213-27.
- [115] Ye Z.-S., Chen N. The Inverse Gaussian Process as a Degradation Model[J]. *Technometrics*, 2014, 56(3):302-311.
- [116] Peng C. Y. Inverse Gaussian Processes With Random Effects and Explanatory Variables for Degradation Data[J]. *Technometrics*, 2015, 57(1):100-111.
- [117] Peng W. W., Li Y. F., Yang Y. J., Huang H. Z., Zuo M. J. Inverse Gaussian process models for degradation analysis: A Bayesian perspective[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2014, 130:175-189.
- [118] Whitmore G. A. Estimating degradation by a Wiener diffusion process subject to measurement error[J]. *Lifetime Data Analysis*, 1995, 1(3):307-19.
- [119] Peng C.-Y., Hsu S.-C. A note on a Wiener process with measurement error[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2012, 25(4):729-732.
- [120] Si X. S., Chen M. Y., Wang W. B., Hu C. H., Zhou D. H. Specifying measurement errors for required lifetime estimation performance[J]. *European Journal of Operational Research*, 2013, 231(3):631-644.
- [121] Ye Z.-S., Wang Y., Tsui K.-L., Pecht M. Degradation Data Analysis Using Wiener Processes With Measurement Errors[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2013, 62(4):772-780.
- [122] Tang S. J., Guo X. S., Yu C. Q., Zhou Z. J., Zhou Z. F., Zhang B. C. Real time remaining useful life prediction based on nonlinear Wiener based degradation processes with measurement errors[J]. *Journal of Central South University*, 2014, 21(12):4509-4517.
- [123] Tang S. J., Yu C. Q., Wang X., Guo X. S., Si X. S. Remaining Useful Life Prediction of Lithium-Ion Batteries Based on the Wiener Process with Measurement Error[J]. *Energies*, 2014, 7(2):520-547.
- [124] Li J., Wang Z., Liu X., Zhang Y., Fu H., Liu C. A Wiener process model for accelerated degradation analysis considering measurement errors[J]. *Microelectronics Reliability*, 2016, 65:8-15.
- [125] Peng C. Y., Tseng S. T. Mis-Specification Analysis of Linear Degradation Models[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2009, 58(3):444-455.
- [126] Si X. S., Wang W. B., Hu C. H., Zhou D. H. Estimating Remaining Useful Life With Three-Source Variability in Degradation Modeling[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2014, 63(1):167-190.
- [127] Tsai C. C., Tseng S. T., Balakrishnan N. Mis-specification analyses of gamma and Wiener degradation processes[J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2011, 141(12):3725-3735.
- [128] Liao H. T., Elsayed E. A. Reliability inference for field conditions from accelerated degradation

- testing[J]. *Naval Research Logistics*, 2006, 53(6):576-587.
- [129] Pan Z. Q., Balakrishnan N. Multiple-Steps Step-Stress Accelerated Degradation Modeling Based on Wiener and Gamma Processes[J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2010, 39(7):1384-1402.
- [130] Wang L. Z., Pan R., Li X. Y., Jiang T. M. A Bayesian reliability evaluation method with integrated accelerated degradation testing and field information[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2013, 112:38-47.
- [131] Wang H.-W., Xu T.-X., Wang W.-Y. Remaining Life Prediction Based on Wiener Processes with ADT Prior Information[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2016, 32(3):753-765.
- [132] Wang H. W., Xu T. X., Mi Q. L. Lifetime prediction based on Gamma processes from accelerated degradation data[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2015, 28(1):172-179.
- [133] Chateauneuf A. Accelerated Life Testing and degradation modeling[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2014, 131:228.
- [134] Li X. Y., Jiang T. M., Sun F. Q., Ma J. Constant Stress ADT for Superluminescent Diode and Parameter Sensitivity Analysis[J]. *Eksploracija I Niezawodnosc-Maintenance and Reliability*, 2010, (2):21-26.
- [135] Chhikara R. S., Folks J. L. The inverse Gaussian distribution: theory, methodology, and applications[M], New York: CRC Press, 1988.
- [136] Meeker W. Q., Escobar L. A. Statistical methods for reliability data[M], New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [137] Heng A., Zhang S., Tan A. C. C., Mathew J. Rotating machinery prognostics: State of the art, challenges and opportunities[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, 23(3):724-739.
- [138] Wang F. K., Lu Y. C. Useful lifetime analysis for high-power white LEDs[J]. *Microelectronics Reliability*, 2014, 54(6-7):1307-1315.
- [139] Caglar R., Ikizoglu S., Seker S. Statistical Wiener process model for vibration signals in accelerated aging processes of electric motors[J]. *Journal of Vibroengineering*, 2014, 16(2):800-807.
- [140] Jardine A. K. S., Lin D. M., Banjevic D. A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2006, 20(7):1483-1510.
- [141] Şeker S. A Reliability Model for Induction Motor Ball Bearing Degradation[J]. *Electric Power Components and Systems*, 2003, 31(7):639-652.
- [142] Williams T., Ribadeneira X., Billington S., Kurfess T. Rolling element bearing diagnostics in run-to-failure lifetime testing[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2001, 15(5):979-993.
- [143] Liao L., Lee J. A novel method for machine performance degradation assessment based on fixed cycle features test[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 326(3-5):894-908.
- [144] Huang R., Xi L., Li X., Liu C. R., Qiu H., Lee J. Residual life predictions for ball bearings based on self-organizing map and back propagation neural network methods[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2007, 21(1):193-207.
- [145] Ocak H., Loparo K. A., Discenzo F. M. Online tracking of bearing wear using wavelet packet decomposition and probabilistic modeling: A method for bearing prognostics[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 302(4-5):951-961.
- [146] Liu J., Djurdjanovic D., Ni J., Casotto N., Lee J. Similarity based method for manufacturing process performance prediction and diagnosis[J]. *Computers in Industry*, 2007, 58(6):558-566.
- [147] Wang Z., Lu C., Wang Z., Ma J. Health assessment of rotary machinery based on integrated feature selection and Gaussian mixed model[J]. *Journal of Vibroengineering*, 2014, 16(4):1753-1762.

- [148] Seker S., Ayaz E. Feature extraction related to bearing damage in electric motors by wavelet analysis[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2003, 340(2):125-134.
- [149] Nectoux P., Gouriveau R., Medjaher K., Ramasso E., Morello B., Zerhouni N., Varnier C. PRONOSTIA: An Experimental Platform for Bearings Accelerated Life Test[C]// *IEEE International Conference on Prognostics and Health Management*, 2012.
- [150] Lee J., Wu F. J., Zhao W. Y., Ghaffari M., Liao L. X., Siegel D. Prognostics and health management design for rotary machinery systems-Reviews, methodology and applications[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2014, 42(1-2):314-334.
- [151] Jolliffe I. *Principal component analysis*[M], Wiley Online Library, 2005.
- [152] Reynolds D. Gaussian mixture models[J]. *Encyclopedia of Biometrics*, 2009:659-663.
- [153] Qiu L., Yuan S., Chang F.-K., Bao Q., Mei H. On-line updating Gaussian mixture model for aircraft wing spar damage evaluation under time-varying boundary condition[J]. *Smart Materials and Structures*, 2014, 23(12):125001.
- [154] Bilmes J. A. A gentle tutorial of the EM algorithm and its application to parameter estimation for Gaussian mixture and hidden Markov models[J]. *International Computer Science Institute*, 1998, 4(510):126.
- [155] McLachlan G. *Discriminant analysis and statistical pattern recognition*[M], John Wiley & Sons, 2004.
- [156] Buckley J. J. *Fuzzy probability and statistics*[M], Springer, 2006.
- [157] Buckley J. J., Qu Y. On using α -cuts to evaluate fuzzy equations[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, 38(3):309-312.
- [158] Tau Lee H., Hua Chen S. Fuzzy regression model with fuzzy input and output data for manpower forecasting[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 119(2):205-213.
- [159] Anderson T. W., Darling D. A. A test of goodness of fit[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1954, 49(268):765-769.
- [160] Tallian T. Weibull Distribution of Rolling Contact Fatigue Life and Deviations Therefrom[J]. *A S L E Transactions*, 1962, 5(1):183-196.
- [161] Javed K., Gouriveau R., Zerhouni N., Nectoux P. Enabling Health Monitoring Approach Based on Vibration Data for Accurate Prognostics[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, 62(1):647-656.
- [162] Wang T. Bearing life prediction based on vibration signals: A case study and lessons learned[C]// *Prognostics and Health Management (PHM), 2012 IEEE Conference on*, 2012.
- [163] Donoho D. L. De-noising by soft-thresholding[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1995, 41(3):613-627.
- [164] Xu A., Tang Y. Objective Bayesian Analysis for Linear Degradation Models[J]. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 2012, 41(21):4034-4046.
- [165] Guan Q., Tang Y., Xu A. Objective Bayesian analysis accelerated degradation test based on Wiener process models[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40(4):2743-2755.
- [166] 刘乐, 李晓阳, 姜同敏. 采用区间分析的加速退化试验评估方法[J]. *北京航空航天大学学报*, 2015, 41(12):2225-2231.
- [167] Kang R., Zhang Q., Zeng Z., Zio E., Li X. Measuring reliability under epistemic uncertainty: Review on non-probabilistic reliability metrics[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2016, 29(3):571-579.
- [168] Liu B. Why is There a Need for Uncertainty Theory?[J]. *Journal of Uncertain Systems*, 2012, 6(1):3-10.
- [169] Liu B. Fuzzy process, hybrid process and uncertain process[J]. *Journal of Uncertain Systems*, 2008,

- 2(1):3-16.
- [170] Liu B. Extreme value theorems of uncertain process with application to insurance risk model[J]. *Soft Computing*, 2013, 17(4):549-556.
- [171] Chen X. Variation analysis of uncertain stationary independent increment processes[J]. *European Journal of Operational Research*, 2012, 222(2):312-316.
- [172] Liu B. Uncertainty distribution and independence of uncertain processes[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2014, 13(3):259-271.
- [173] Liu B. Some Research Problems in Uncertainty Theory[J]. *Journal of Uncertain Systems*, 2009, 3(1):3-10.
- [174] Chen X., Liu B. Existence and uniqueness theorem for uncertain differential equations[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2010, 9(1):69-81.
- [175] Chen X., Ralescu D. A. Liu process and uncertain calculus[J]. *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, 2013, 1(1):1-12.
- [176] Liu B. *Uncertainty Theory*[M], Springer Berlin Heidelberg, 2015.
- [177] Yang G. *Life cycle reliability engineering*[M], John Wiley & Sons, 2007.
- [178] Wang X. L., Balakrishnan N., Guo B. Residual life estimation based on a generalized Wiener degradation process[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2014, 124:13-23.
- [179] Wang H. W., Xu T. X., Wang W. Y. Remaining Life Prediction Based on Wiener Processes with ADT Prior Information[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2016, 32(3):753-765.
- [180] Yu I. T., Chang C. L. Applying Bayesian Model Averaging for Quantile Estimation in Accelerated Life Tests[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2012, 61(1):74-83.
- [181] Laskey K. B. Model uncertainty: theory and practical implications[J]. *Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, *IEEE Transactions on*, 1996, 26(3):340-348.
- [182] Nilsen T., Aven T. Models and model uncertainty in the context of risk analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2003, 79(3):309-317.
- [183] Zio E., Apostolakis G. E. Two methods for the structured assessment of model uncertainty by experts in performance assessments of radioactive waste repositories[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 1996, 54(2-3):225-241.
- [184] Droguett E. L., Mosleh A. Bayesian Methodology for Model Uncertainty Using Model Performance Data[J]. *Risk Analysis*, 2008, 28(5):1457-1476.
- [185] Baraldi P., Zio E. A Comparison Between Probabilistic and Dempster-Shafer Theory Approaches to Model Uncertainty Analysis in the Performance Assessment of Radioactive Waste Repositories[J]. *Risk Analysis*, 2010, 30(7):1139-1156.
- [186] Park I., Grandhi R. V. Quantification of model-form and parametric uncertainty using evidence theory[J]. *Structural Safety*, 2012, 39(0):44-51.
- [187] Pan R. A Bayes approach to reliability prediction utilizing data from accelerated life tests and field failure observations[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2009, 25(2):229-240.
- [188] Musallam M., Yin C. Y., Bailey C., Johnson C. M. Application of coupled electro-thermal and physics-of-failure-based analysis to the design of accelerated life tests for power modules[J]. *Microelectronics Reliability*, 2014, 54(1):172-181.
- [189] Lim H., Yum B. J. Optimal design of accelerated degradation tests based on Wiener process models[J]. *Journal of Applied Statistics*, 2011, 38(2):309-325.
- [190] Bhattacharyya G., Fries A. Fatigue Failure Models -- Birnbaum-Saunders vs. Inverse Gaussian[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 1982, 31(5):439-441.

- [191] Ye Z. S., Chen L. P., Tang L. C., Xie M. Accelerated Degradation Test Planning Using the Inverse Gaussian Process[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2014, 63(3):750-763.
- [192] Chang D. S., Tang L. C. Percentile bounds and tolerance limits for the birnbaum-saunders distribution[J]. *Communication in Statistics- Theory and Methods*, 1994, 23(10):2853-2863.
- [193] Lio Y. L., Lu J. C., Ruan L. Robust Parameter Design for Quality and Reliability Issues Based on Accelerated Degradation Measurements[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2015, 64(3):949-959.
- [194] Tsai C. C., Lin C. T. Lifetime Inference for Highly Reliable Products Based on Skew-Normal Accelerated Destructive Degradation Test Model[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2015, 64(4):1340-1355.
- [195] Ntzoufras I. Bayesian modeling using WinBUGS[M], New Jersey: John Wiley & Sons, 2009.
- [196] Liu L., Li X.-Y., Jiang T.-M., Sun F.-Q. Utilizing Accelerated Degradation and Field Data for Life Prediction of Highly Reliable Products[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2016, 32(7):2281-2297.
- [197] Raftery A. E., Madigan D., Hoeting J. A. Bayesian model averaging for linear regression models[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1997, 92(437):179-191.
- [198] 方良海, 产品可靠性评估中的多源信息融合技术研究[D], 博士, 合肥工业大学, 2006.
- [199] 王立志, 基于多源信息的寿命预测技术研究[D], 博士, 北京航空航天大学, 2013.
- [200] Tseng S.-T., Hsu N.-J., Lin Y.-C. Joint modeling of laboratory and field data with application to warranty prediction for highly reliable products[J]. *IIE Transactions*, 2016, 48(8):710-719.
- [201] Haghghi F., Suk Joo B. Reliability Estimation from Linear Degradation and Failure Time Data With Competing Risks Under a Step-Stress Accelerated Degradation Test[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2015, 64(3):960-971.
- [202] 邹田骥, 加速退化试验贝叶斯优化设计中先验分布的影响分析[D], 硕士, 北京航空航天大学, 2015.
- [203] Lu L., Anderson-Cook C. M. Improving Reliability Understanding Through Estimation and Prediction with Usage Information[J]. *Quality Engineering*, 2015, 27(3):304-316.
- [204] Zhou D. H., Frank P. M. Strong tracking filtering of nonlinear time-varying stochastic systems with coloured noise: application to parameter estimation and empirical robustness analysis[J]. *International Journal of Control*, 1996, 65(2):295-307.
- [205] Si X. S., Wang W. B., Hu C. H., Chen M. Y., Zhou D. H. A Wiener-process-based degradation model with a recursive filter algorithm for remaining useful life estimation[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013, 35(1-2):219-237.
- [206] Si X. S., Wang W. B., Hu C. H., Zhou D. H., Pecht M. G. Remaining Useful Life Estimation Based on a Nonlinear Diffusion Degradation Process[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2012, 61(1):50-67.
- [207] Gelman A., Rubin D. B. Inference from iterative simulation using multiple sequences[J]. *Statistical science*, 1992:457-472.
- [208] Spiegelhalter D. J., Best N. G., Carlin B. P., Van Der Linde A. Bayesian measures of model complexity and fit[J]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 2002, 64(4):583-639.
- [209] Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables[M], Courier Corporation, 1964.

攻读博士学位期间取得的研究成果

期刊论文:

- [1] **Liu L.**, Li X.-Y.* , Zio E., Kang R., Jiang T.-M. Model uncertainty in accelerated degradation testing analysis[J], IEEE Transactions on Reliability, 2017, 66(3):603-615. (SCIE: 000409041700002)
- [2] **Liu L.**, Li X.-Y., Sun F.-Q.* , Wang N. A general accelerated degradation model based on the Wiener process[J], Materials, 2016, 9(12):981. (SCIE:000390953400027)
- [3] **Liu L.**, Li X.-Y.* , Jiang T.-M., Sun F.-Q. Utilizing accelerated degradation and field data for life prediction of highly reliable products[J], Quality and Reliability Engineering International, 2016, 32(7):2281-2297. (SCIE: 000386913700010)
- [4] **Liu L.**, Li X.-Y.* , Jiang T.-M. Integration Method for Reliability Assessment with Multi-Source Incomplete Accelerated Degradation Testing Data[J], Quality Engineering, 2017. (SCIE: 000404589900004)
- [5] Sun F.-Q., **Liu L.**, Li X.-Y., Liao H.-T.* Stochastic modeling and analysis of multiple nonlinear accelerated degradation processes through information fusion[J], Sensors, 2016, 16(8):1242. (SCIE: 000382323200130)
- [6] **Liu L.**, Li X.-Y.* , Zhang W., Jiang T.-M. Fuzzy reliability prediction of rotating machinery product with accelerated testing data[J], Journal of Vibroengineering, 2015, 17(8):4193-4210. (SCIE: 000367463200012)
- [7] Yin Y., Chen Y.-X., **Liu L.*** Lifetime prediction for the subsurface crack propagation using three-dimensional dynamic FEA model[J], Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 87PA:54-70. (SCIE: 000390086600005)
- [8] 刘乐, 李晓阳*, 姜同敏. 采用区间分析的加速退化试验评估方法[J]. 北京航空航天大学学报, 2015, 41(12):2225-2231. (EI: 20160401845149)
- [9] **Liu L.**, Li X.-Y.* , Jiang T.-M. Fuzzy analysis of bearing accelerated degradation testing with uncertainty[J], Vibroengineering Procedia, 2014, 4:137-142. (EI: 20144700235844)
- [10] Li X.-Y.* , **Liu L.**, He B., Jiang T.-M. Accelerated degradation test and particle filter based remaining useful life prediction[J], Chemical Engineering Transactions, 2013, 33:343-348.

(EI: 20133816755800)

会议论文:

- [1] **Liu L.**, Li X.-Y., Jiang T.-M., Zhang J.-G. Optimal design for accelerated degradation tests with stochastic model uncertainty[C]// European Safety and Reliability Conference, ESREL 2016, Glasgow, UK, 2016, 10-15. (EI)
- [2] **Liu L.**, Li X.-Y., Jiang T.-M. Nonlinear accelerated degradation analysis based on the general Wiener process[C]// European Safety and Reliability Conference, ESREL 2015, Zurich, Switzerland, 2015, 2083-2088. (EI: 20160902010276)
- [3] Li X.-Y., **Liu L.**, Kang R., Lee J., Xu D., Sun F.-Q. Experiments for PHM: Needs, developments and challenges[C]// European Safety and Reliability Conference, ESREL 2014, Wroclaw, Poland, 2014, 569-576. (EI: 20143618128038)
- [4] Xu H., **Liu L.**, Li X.-Y. A Statistical method of accelerated life testing based on fuzzy theory[C]// 2014 International Conference on Reliability, Maintainability and Safety, 2014, 746-749. (EI: 20152700998779)
- [5] Xu H., Li X.-Y., **Liu L.** Statistical analysis of accelerated life testing under Weibull distribution based on fuzzy theory[C]// Annual Reliability and Maintainability Symposium, RAMS 2015, 2015, 26-29. (EI: 20154401476213)
- [6] Chen X., Li X.-Y., **Liu L.**, Kang R. Error allocation for motion mechanism based on the kinematic accuracy reliability[C]// European Safety and Reliability Conference, ESREL 2016, Glasgow, UK, 2016, 2610-2616. (EI)
- [7] Li X.-Y., Hu Y.-Q., Li R.-Q., **Liu L.** Bayesian optimal design of sequential stress accelerated degradation testing[C]// 2016 Prognostics & System Health Management Conference, PHM-2016, Chengdu, China, 2016. (EI)

专利:

- [1] 李晓阳, 刘乐, 康锐, 基于不确定过程的加速退化建模评估方法, 受理号: 201611155323.3

攻读博士学位期间所参与的科研项目

- 国家安全重大基础研究项目子课题：机电产品寿命预测
- 国家安全重大基础研究项目子课题：复杂机构可靠性指标体系与分配方法研究
- 国家自然科学基金青年项目：基于随机过程和相对熵的加速退化试验贝叶斯优化设计
- 国家自然科学基金青年项目：相依情形下多退化过程与随机冲击竞争失效系统可靠性建模方法
- 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目：考虑认知不确定性的退化数据非精确概率建模方法
- 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目：考虑混合不确定性的加速退化试验评估方法研究
- 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目：考虑混合不确定性的可靠度建模与分析方法研究
- 青岛软控股份有限公司合作项目：动平衡测量系统测试数据可重复性研究
- 国营 613 厂合作项目：某型电机驱动器可靠性预计
- 中电 49 所合作项目：氧化锆氧传感器寿命与可靠性评估

致谢

写在博士论文结尾之际，想起那句“梅花香自苦寒来”，我生于 89 年寒冬，27 载心路历程，未曾感慨韶光易逝与岁月蹉跎，只因那些在我人生道路上相伴相随的家人、老师、朋友亦或一面之缘的匆匆过客，在此致以我最诚挚的谢意。

感谢我的“恩师”、“晓阳姐”和“班主任”李晓阳副教授，北航 9 年，不管是为人处世还是科研工作，您都身体力行地启发、引导和培育我，“一日为师，终生为父”，感谢您让我一直勇敢地前行。

感谢姜同敏教授、张建国教授给我提供一个良好的科研平台，指导我博士阶段的学习和研究，并一直支持着我去追求卓越、不懈进取。

感谢康锐教授、Enrico Zio 教授在科研及论文写作上给予的指导，让我受益良多，也深化了我对于可靠性的理解和认知。

感谢原 302 和 304 实验室孙富强、王立志、葛蒸蒸、党香俊、范宇、王凤金、何宾、封雷、高鹏飞、李文涛等师兄师姐，以及张慰师兄，向你们学习是我不断进步的源动力。

感谢课题组张宪坤、李人擎、吴纪鹏、马林烨、胡雨晴、陈文彬、刘岳、王宁等师弟师妹们的陪伴，是你们让 324 实验室的生活多姿多彩。

感谢本科 3814 大班和博士 BY12141 班所有同学给予的支持和陪伴。感谢本科 21 号楼 423 的史喆、王林、吴迪和林元晟，以及 11 号楼 558 的林元晟和蔡义坤，谢谢你们陪伴着我度过了本科和博士阶段的生活，并一直以来鼓励着我。感谢本科及研究生同窗邹田骥、陈星、许瀚，6 年时间里感谢你们在我困惑时容忍我的唠绕，鼓励我不放弃。

感谢我的女朋友，与你相遇是我人生最大的幸福。

我还要感谢我的家人：感谢我的父母，是你们不求回报的付出让我能够坚持学业至今；感谢外婆、外公、大姨、大姨夫还有我那慈爱的曾祖母在我人生道路上的呵护与支持，让幼时的我倍感温暖；感谢我的哥哥还有表哥们，一直以来对我的关心和陪伴；感谢小舅、五叔在我人生抉择时给予的帮助、理解和支持。

感谢我的母校：前进小学、双桥中学、怀远第一中学、北航对我一直以来的培养。

最后，感谢评阅老师们在百忙之中对本论文提出的宝贵意见，感谢所有引文作者对本论文研究工作的启发。

作者简介

刘乐，1989年12月出生，安徽省蚌埠市人。2012年6月毕业于北京航空航天大学可靠性与系统工程学院，获工学学士学位。2012年9月于北京航空航天大学可靠性与系统工程学院攻读博士学位。攻读博士学位期间主要从事加速试验技术、可靠性评估、不确定性量化分析及寿命预测技术研究。

本人在读期间获得过以下奖励：

- 2017届（春季）北京市优秀毕业生
- 2016~2017年度CASC奖学金二等奖
- 2012~2013年度北航优秀学生干部
- 2012年校庆志愿服务先进个人
- 2012届北京市优秀毕业生
- 2009~2010年度杨为民奖学金特等奖、北航优秀生、北航学习优秀一等奖
- 2009~2010、2010~2011年度北航三好学生